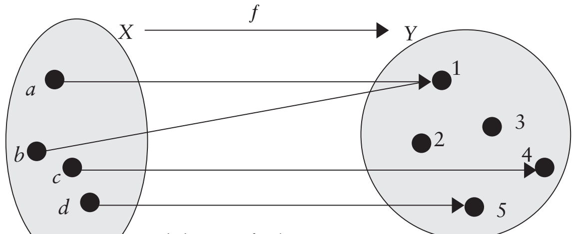
Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Fonksiyonlara Genel Giriş

1. Tanım. Fonksiyon kavramının matematiğin en önemli kavramlarından biri olduğunu söylemek fonksiyon kavramına büyük haksızlık olur. Fonksiyon, matematiğin en önemli kavramlarından biri değil, matematiğin en önemli kavramıdır. Küme kavramı hariç, belki...

Bilimin b'sinin girdiği her yerde fonksiyona rastlanır.

Artık ilkokullarda bile öğretiliyor fonksiyon. Herhalde aşağıdakine benzer şekilleri eğitim hayatınız boyunca sık sık görmüşsünüzdür.



Şekil 1. Bir fonksiyon resmi

Üst soldaki yumurta bir kümedir (Şekil 1). Sağdaki domates de... İçindeki noktalar kümelerin elemanlarıdır. Soldaki yumurtanın her elemanı sağdaki domatesin bir elemanına bir okla "gönderilmiştir".

Burada X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyon şekledilmiştir. Sol taraftaki X kümesinin dört elemanı vardır: a, b, c ve d. Açıkça söylenmez ama bu elemanların birbirinden değişik oldukları varsayılır. Sağ taraftaki kümeninse beş elemanı vardır: 1, 2, 3, 4, 5.

f, sol taraftaki kümenin her elemanını sağ taraftaki kümenin bir elemanına gönderen bir kuraldır. Örneğin X kümesinin a ve b elemanları f kuralı gereğince Y'nin 1 elemanına giderler. Bu,

$$f(a) = f(b) = 1$$

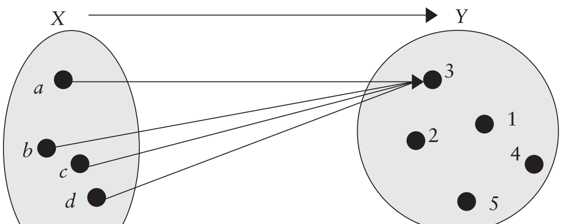
olarak gösterilir. Aynı biçimde,

$$f(c) = 4$$
$$f(d) = 5$$

yazılır.

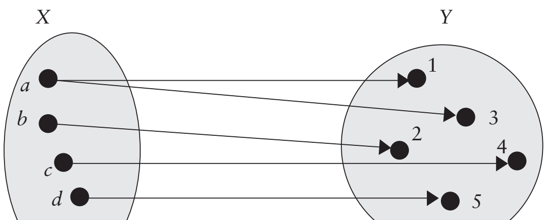
Y'nin 2 ve 3 elemanlarına X'ten hiçbir eleman gitmiyor. Bu hiç sorun edilmez. X'ten Y'ye giden bir fonksiyon Y'nin her elemanına dokunmak zorunda değildir.

Bu ilk örnekte de olduğu gibi, X'in iki ayrı elemanı (a ve b elemanları) Y'nin aynı elemanına (1 elemanına) gidebilir. Hatta X kümesinin bütün elemanları Y kümesinin aynı elemanına gidebilir. Bu tür fonksiyonlara ***sabit fonksiyon*** denir (Şekil 2).



Şekil 2. Sabit 3 fonksiyonu

X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyonda önemli olan, X'in **her** elemanının, tanımlanan kural gereğince, Y'nin **tek bir** elemanına gönderilmesidir.

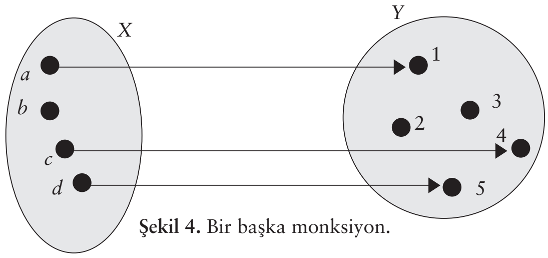


Şekil 3. Bir monksiyon.

Örneğin Şekil 3'teki kural bir fonksiyon tanımlamaz. Çünkü burada X kümesinin a elemanı Y kümesinin iki ayrı elemanına (1'e ve 3'e) gönderilmekte. Fonksiyonun tanımı bunu yasaklar.

Dileyen, Şekil 3'teki "şey"e başka bir ad bulabilir, örneğin "çok değerli fonksiyon" ya da "monksiyon" gibi. Ama bu "şey" kesinlikle bir fonksiyon değildir.

Şekil 4'teki şey de bir fonksiyon değildir. Çünkü bu kez X kümesinin b elemanı Y'nin hiçbir elemanına gönderilmemiş. Fonksiyonun tanımı bunu da yasaklar. X'ten Y'ye giden bir fonksiyon X'in **her** elemanını Y'nin bir (ve bir tek) elemanına göndermeli.



Şekil 4. Bir başka monksiyon.

Fonksiyonun Türkçesi "gönderme" olabilir. Alışınca yabancılık çekilmiyor, her zaman olduğu gibi...

Eğer f, X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyonsa, bunu

$$f : X \to Y$$

olarak ve eğer f fonksiyonu X kümesinin x elemanını Y kümesinin y elemanına gönderiyorsa bunu,

$$f(x) = y \text{ ya da } f : x \mapsto y$$

olarak yazarız. O zaman y elemanına x'in ***görüntü***sü ya da ***imge***si denir.

X kümesine f fonksiyonunun ***kalkış kümesi***, Y kümesine de ***varış kümesi*** adı verilir.

Sayı Kümeleri

Doğal sayılar kümesi = $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3,...}
Tam sayılar kümesi = $\mathbb{Z}$ = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}
Kesirli sayılar kümesi = $\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
Gerçel sayılar kümesi = $\mathbb{R}$ = "sayı doğrusu"ndaki tüm sayılar

Örneğin, $f(x) = x^2$ kuralı, tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'den gerçel (reel) sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyondur. Elbette $f(-2) = f(2) = 4$.

Ama aynı $f(x) = x^2$ kuralı bize $\mathbb{Z}$ kümesinden gene $\mathbb{Z}$ kümesine giden bir **başka** fonksiyon verir. Ve hatta aynı kural bize $\mathbb{Z}$ kümesinden doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'ye giden bir **başka** fonksiyon verir. Ve hatta aynı kural bize $\mathbb{R}$ kümesinden gene $\mathbb{R}$ kümesine giden bir **başka** fonksiyon verir. Ve hatta aynı kural bize $\mathbb{R}$ kümesinden negatif olmayan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesine giden bir **başka** fonksiyon verir...

Bir başka deyişle, fonksiyon kavramının tanımının içinde (fonksiyonun kuralından başka) bir de fonksiyonun kalkış ve varış kümeleri vardır. Kural değişmese de, kalkış ve varış kümeleri değiştiğinde fonksiyonun da değiştiği kabul edilir. Yani bir fonksiyon sadece bir kural değildir, fonksiyon tanımının içinde fonksiyonun kuralı vardır, ama aynı zamanda kalkış ve varış kümeleri de vardır.

Bir fonksiyonu, (kalkış kümesi + varış kümesi + kalkış kümesinin her elemanı için varış kümesinin tek bir elemanını veren bir kural) olarak tanımlayabiliriz. Ama ağız alışkanlığıyla ve kolaylık olsun diye, çoğu zaman sadece kural söylenir. Kalkış ve varış kümelerinin bilindikleri varsayılır.

Örnekler. $f(x) = \sqrt{x}$ kuralı, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlamaz, çünkü negatif gerçel sayıların karekökü yoktur (ya da $\mathbb{R}$'de değildir bu karekök.) X'ten Y'ye giden bir fonksiyon, X'teki **her** elemanı Y'deki bir elemana göndermeli.

Öte yandan, aynı kural, negatif olmayan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon tanımlar.

Buna benzer bir nedenden, $f(x) = 1/x$ kuralı, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlamaz (0'in görüntüsü yok.) Öte yandan $f(x) = 1/x$ kuralı, $\mathbb{R}^{>0}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine ($\mathbb{R}^{>0}$ kümesine de) giden bir fonksiyon tanımlar. Aynı kural, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden bir **başka** fonksiyon tanımlar.

$f(x) = \pm\, x$ kuralı da $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlamaz, çünkü $f(x)$ tek bir değer olmalı. X'ten Y'ye giden bir fonksiyon, X kümesindeki her elemanı Y kümesinden **tek bir** elemana göndermeli.

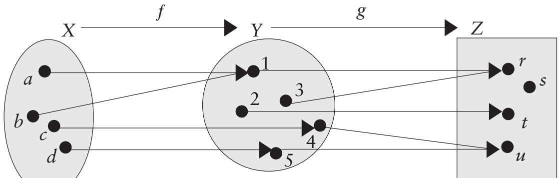
Öte yandan, $f(x) = \{x, -x\}$ kuralı $\mathbb{R}$ kümesinden $\mathbb{R}$'nin (en fazla iki elemanlı) altkümeler kümesine giden bir fonksiyon tanımlar.

Kural da Nesi? Bu "kural" sözcüğü sizi rahatsız etmiş olabilir. Bu sözcükten ben de rahatsızım. Her şeyden önce "kural"ın tanımını yapmadık. Kural da ne demek! Ayrıca kuralı belli olmayan ya da kuralı bilinip de hesaplanamayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin, her doğal sayıyı, başımdaki şu andaki saç teli sayısı artı İkinci Dünya Savaşı'nda ölen Fransız subayı sayısına yollayan sabit fonksiyonun değeri sanırım bilinmez, ama bu "kural" gene de bir fonksiyon tanımlar. Biz şimdilik bu tür tuhaflıkları görmezden gelelim. Ama sadece şimdilik... Seçim Fonksiyonları yazısında kuralı bilinmeyen fonksiyonları konu edeceğiz.

Sizi daha fazla rahatsız edecek bir şey daha söyleyeyim: Fonksiyonun matematiksel tanımı yukardaki gibi değildir. Matematikte her şey bir kümedir, fonksiyon da dahil olmak üzere... Ve biz yukarıda fonksiyonu bir küme olarak tanımlamadık... Ama – inanın bana – fonksiyonun tam matematiksel tanımını bilmek pek o kadar önemli değildir.

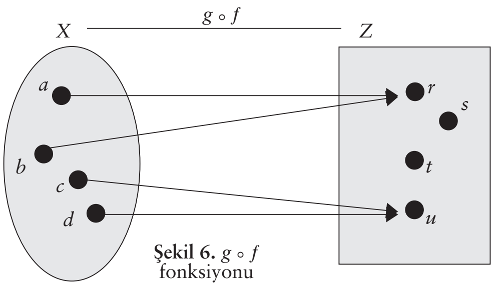
Sonuç olarak, X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyon, X kümesinin **her** elemanını Y kümesinden **tek bir** elemana götüren bir kuraldır.

2. Fonksiyonların Bileşkesi. f, X kümesinden Y kümesine, g de Y kümesinden Z kümesine giden bir fonksiyon olsunlar. Örneğin aşağıdaki şekildeki gibi:



Şekil 5. f ve g fonksiyonları

Bu iki fonksiyonun ***bileşkesi***ni alıp X'ten Z'ye giden bir fonksiyon elde edebiliriz. Şöyle yaparız: X'ten herhangi bir eleman alalım, diyelim a'yı aldık. Bu elemana f'yi uygulayıp Y'den bir eleman bulalım; örneğimizde $f(a)$ buluruz, yani 1'i. Şimdi Y'nin bu elemanına g'yi uygulayıp Z'den bir eleman bulalım, örneğimizde $g(1)$ buluruz, yani r'yi. Bu bize yeni bir fonksiyon verir. Bu yeni fonksiyon, X'in a elemanını Z'nin r elemanına gönderir (Şekil 6.)



Şekil 6. $g \circ f$ fonksiyonu

Yukarıda f ve g fonksiyonlarını kullanarak elde ettiğimiz fonksiyona f ve g'nin ***bileşkesi*** adı verilir ve bu yeni fonksiyon $g \circ f$ olarak yazılır. Yukarda da gördüğümüz gibi,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = r.$$

Bunun gibi,

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(1) = r,$$
$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(4) = u,$$
$$(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(5) = u.$$

$g \circ f$ bileşkesinden söz edebilmek için f kümesinin varış kümesiyle g kümesinin kalkış kümelerinin aynı kümeler olması gerektiğine dikkatinizi çekerim. Kalkış ve varış kümeleri aynı olan fonksiyonların (yani bir X kümesinden gene aynı X kümesine giden fonksiyonların) hiç düşünmeden istediğimiz gibi bileşkelerini alabiliriz.

Fonksiyonların bileşkesi önemli bir kavramdır. Birkaç örnek daha verelim.

Örnek 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ kuralıyla, $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = x - 5$ kuralıyla tanımlansın. O zaman, her $x \in \mathbb{R}$ için, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 5$.

Bu örnekte g ve f'nin de bileşkelerini alıp $f \circ g$ fonksiyonundan söz edebiliriz: Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 5) = (x - 5)^2.$$

Görüldüğü gibi $g \circ f \neq f \circ g$.

Örnek 2. $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu $f(x) = \sqrt{x}$ olarak tanımlansın. $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $g(x) = x - 5$ olarak tanımlansın. O zaman, her $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 5$. Bu örnekte $f \circ g$ diye bir fonksiyondan sözedemeyiz, çünkü g'nin varış kümesi negatif sayıları içeriyor ama f negatif sayılarda tanımlanmıyor.

Bileşkenin Birleşme Özelliği. Aşağıdaki gibi üç fonksiyonumuz olsun:

$$f : X \to Y,$$
$$g : Y \to Z,$$
$$h : Z \to T.$$

Bu üç fonksiyonla ilk bakışta değişik gibi görünen iki işlem yapabiliriz:

1) $g \circ f : X \to Z$ ve $h : Z \to T$ fonksiyonlarının bileşkesini alıp $h \circ (g \circ f) : X \to T$ fonksiyonuna bakabiliriz.

2) $f : X \to Y$ ve $h \circ g : Y \to T$ fonksiyonlarının bileşkesini alıp $(h \circ g) \circ f : X \to T$ fonksiyonuna bakabiliriz.

Bu iki fonksiyon birbirine eşittir. Bunu kanıtlayalım.

Ama önce iki fonksiyonun ne zaman birbirine eşit olduğunu bilmeliyiz: Eğer aynı kalkış ve varış kümeleri olan iki fonksiyon, kalkış kümesindeki her elemanı, hep, varış kümesinin aynı elemanına gönderiyorlarsa, o zaman o iki fonksiyon eşittirler. Örneğin, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $a(x) = \sqrt{x^2}$ fonksiyonuyla $b(x) = |x|$ fonksiyonu birbirine eşittirler.

X'den T'ye giden $h \circ (g \circ f)$ ve $(h \circ g) \circ f$ fonksiyonlarının aldıkları değerleri hesaplayalım, bakalım eşitler mi? $x \in X$ olsun. Bileşkenin tanımını ikişer kez uygulayarak hesaplayalım:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Demek ki, her $x \in X$ için,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

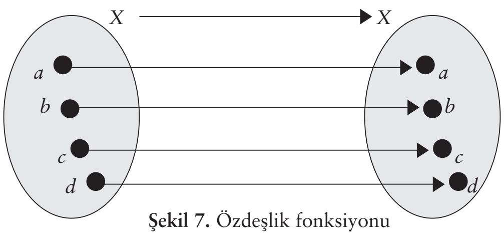
Dolayısıyla $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Buna fonksiyonların ***birleşme özelliği*** denir.

Bu demektir ki ikiden fazla fonksiyonun bileşkesini alırken parantez kullanmak gereksizdir; sıra gözettikten sonra, bileşkelerini almak için fonksiyonları dilediğimiz gibi gruplandırabiliriz. Bu nedenle $h \circ (g \circ f)$ ya da $(h \circ g) \circ f$ yazmak yerine, parantezleri atıp $h \circ g \circ f$ yazarız.

Bileşkenin Etkisiz Elemanı. X herhangi bir küme olsun. X'ten X'e giden çok özel bir fonksiyon tanımlayacağız şimdi, *özdeşlik fonksiyonunu*. Özdeşlik fonksiyonu, X'in her elemanını gene kendisine gönderir, yani aslında hiçbir şey yapmaz! X'ten X'e giden bu fonksiyon Id_X olarak gösterilir. Id, "özdeşlik" anlamına gelen İngilizce *identity*'nin ya da Fransızca *identité*'nin Id'idir.

Demek ki, her $x \in X$ için, $\mathrm{Id}_X(x) = x$.



Şekil 7. Özdeşlik fonksiyonu

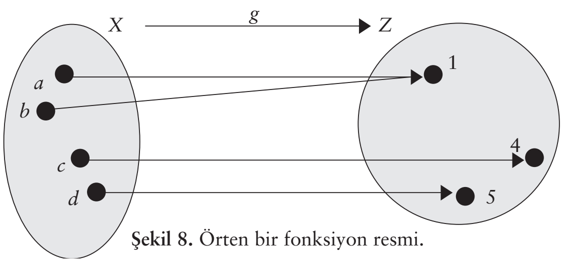
Özdeşlik fonksiyonlarının şu özelliği vardır: Eğer $f : X \to Y$ bir fonksiyonsa, o zaman,

$$f \circ \mathrm{Id}_X = f \quad \text{ve} \quad \mathrm{Id}_Y \circ f = f.$$

Bu yüzden özdeşlik fonksiyonuna, fonksiyonların ***etkisiz elemanı*** da diyebiliriz.

3. FONKSİYON ÇEŞİTLERİ: Birebir, Örten, Eşleme, Eşleşme. Bu bölümde fonksiyonların bazı önemli özelliklerini tanımlayacağız.

Örten Fonksiyonlar. Şekil 1'deki örneğe bir kez daha bakalım. O örnekte X'ten hiçbir eleman Y'nin 2 ve 3 elemanına gitmemiş. Şimdi 2 ve 3 elemanlarını Y'den atıp yeni bir g fonksiyonu tanımlayalım (Şekil 8. Varış kümesi değiştiğinden, varış kümesi artık Y değil, varış kümesine Z diyelim.) Bu sefer, varış kümesi Z'nin her elemanına X'ten bir eleman ulaşıyor. Bu özelliği olan bir fonksiyona ***örten fonksiyon*** denir.



Şekil 8. Örten bir fonksiyon resmi.

Daha formel bir biçimde ifade edecek olursak, bir $g : X \to Z$ fonksiyonu, eğer

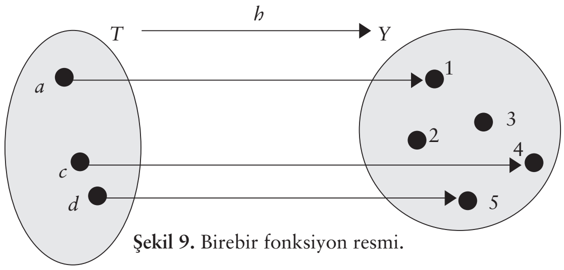
her $z \in Z$ için, $g(x) = z$ eşitliğini
sağlayan bir $x \in X$ vardır

özelliğini sağlıyorsa, o zaman g fonksiyonuna ***örten*** denir.

Örneğin $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon örten değildir, çünkü karesi -1 olan bir gerçel sayı yoktur. Ama $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesine giden ve gene $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon örtendir.

n elemanlı bir kümeden Y kümesine giden örten bir fonksiyon olması için, Y'nin en fazla n elemanı olmalıdır elbet.

Birebir Fonksiyonlar. Gene Şekil 1'deki örneğe bakalım. O örnekte X'in a ve b elemanları Y'nin aynı elemanına (1'e) gidiyorlar. X kümesinden a ya da b'den birini atarsak böyle bir "sorun"la karşılaşmayız. Diyelim b'yi attık. Elde ettiğimiz fonksiyona h diyelim. (Şekil 9. X kümesi değiştiğinden, kalkış kümesi artık X değil. Kalkış kümesine T diyelim.) Şimdi artık h fonksiyonunda kalkış kümesi T'nin her elemanı varış kümesi Y'nin bir **başka** elemanına gider. Yani $h : T \to Y$



Şekil 9. Birebir fonksiyon resmi.

fonksiyonu,

her $t_1, t_2 \in T$ için, eğer
$h(t_1) = h(t_2)$ eşitliği doğruysa,
o zaman $t_1 = t_2$ eşitliği doğrudur

özelliğini sağlar. Bu özelliği sağlayan fonksiyonlara ***birebir fonksiyon***lar denir.

Örneğin $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon birebir değildir. Çünkü örneğin -3 ve 3 aynı elemana (9'a) giderler. Öte yandan $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden ve gene $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon birebirdir.

Bir X kümesinden n elemanlı bir kümeye giden birebir bir fonksiyon olması için, X'in en fazla n elemanı olabilir elbet.

Eşlemeler. Yukarda verdiğimiz örneklerden dördüncü özet olarak yazalım:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu ne örtendir ne de birebir.

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $g(x) = x^2$ fonksiyonu örtendir ama birebir değildir.

3) $h : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ fonksiyonu birebirdir ama örten değildir.

4) $k : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $k(x) = x^2$ fonksiyonu hem birebirdir hem de örten.

Hem örten hem de birebir olan bir fonksiyona ***eşleme*** denir. Demek ki dördüncü örnek bir eşleme, diğer üçü değil.

Id_X her zaman bir eşlemedir elbet.

Aralarında eşleme olan iki sonlu kümenin eleman sayısı eşit olmak zorundadır.

Bir kümeden gene kendisine giden eşlemelere ***eşleşme*** diyebiliriz.

Alıştırmalar. Aşağıdaki alıştırmalarda iki fonksiyonun bileşkesinden söz edildiğinde, bu fonksiyonların bileşkesinin alınabileceği, yani birinin varış kümesinin diğerinin kalkış kümesinin içinde olduğu varsayılmaktadır.

i. İki örten fonksiyonun bileşkesinin örten olduğunu kanıtlayın.

ii. İki birebir fonksiyonun bileşkesinin birebir olduğunu kanıtlayın.

iii. İki eşlemenin bileşkesinin eşleme olduğunu kanıtlayın.

iv. $f \circ g$ örtense f'nin de örten olduğunu kanıtlayın. g de örten olmak zorunda mı?

v. $f \circ g$ birebirse g'nin de birebir olduğunu kanıtlayın. f de birebir olmak zorunda mı?

Eşlemelerin Tersi. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f, X'in elemanlarını Y'nin elemanlarına götürüyor. Şimdi, bunun tam tersini yapmak istiyoruz, Y'nin bir elemanını X'e, aynen geldiği yere geri göndermek istiyoruz. Örneğin $f(a) = b$ ise, b'yi a'ya geri göndermek istiyoruz ve bunu bir fonksiyonla yapmak istiyoruz.

İki sorun çıkabilir:

1) Y'deki bir elemana f dokunmayabilir. O zaman dokunulmayan bu elemanı geri gönderecek yer yoktur. Ama eğer f örtense o zaman bu sorun ortadan kalkar.

2) Y'deki aynı elemana X'ten birden çok eleman dokunabilir. O zaman Y'nin bu elemanını kendisine dokunan elemanlardan hangi birine geri göndereceğiz? Aralarından seçim yapmak gerekebilir. Zor iş! Ama eğer f birebirse böyle bir sorunla karşılaşmayız.

Eğer f hem birebir hem de örtense (yani eşlemeyse), Y'nin her elemanına X'in bir ve bir tek elemanı dokunur. O zaman f fonksiyonunun tersini tanımlayabiliriz:

Tanım: $f : X \to Y$ bir eşleme olsun.

$$f^{-1} : Y \to X$$

fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

f^{-1} fonksiyonu da bir eşlemedir. f^{-1} fonksiyonuna f'nin ***tersi*** denir. Aşağıdaki eşitlik sağlanır elbet:

$$f^{-1} \circ f = Id_X \quad \text{ve} \quad f \circ f^{-1} = Id_Y.$$

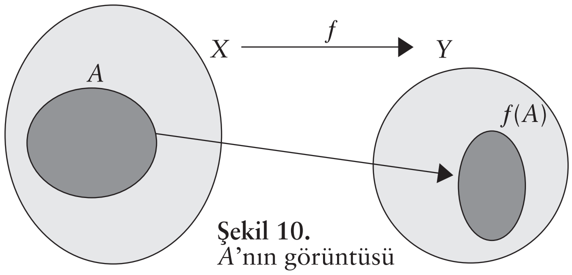
Ayrıca, $g \circ f = Id_X$ ve $f \circ g = Id_Y$ eşitliklerini sağlayan bir $g : Y \to X$ fonksiyonu f^{-1} fonksiyonuna eşit olmak zorundadır. (Neden?)

4. Görüntü ve Öngörüntü

$f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer A, X'in bir altkümesiyse, $f(A)$ kümesini şöyle tanımlayalım:

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

$f(A)$, Y kümesinin bir altkümesidir elbette. $f(A)$ kümesine A'nın (f altında) ***görüntü***sü adı verilir. Örneğin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ kuralıyla verilmişse,



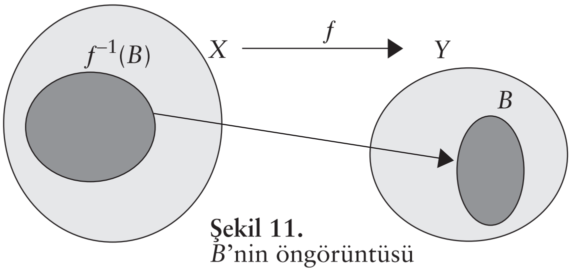
Şekil 10.
A'nın görüntüsü

$$f(\{5\}) = \{25\}$$
$$f(\{-5, 5\}) = \{25\}$$
$$f(\{-3, 5\}) = \{9, 25\}$$
$$f((-1,1)) = [0,1)$$
$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\geq 0}$$
$$f(\emptyset) = \emptyset.$$

Şimdi de $B \subseteq Y$ verilmiş olsun. X'in $f^{-1}(B)$ altkümesini şöyle tanımlayalım:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Yani $f^{-1}(B)$, X'in f fonksiyonu altında B'ye giden elemanlarından oluşur. $f^{-1}(B)$ kümesine B'nin ***öngörüntü***sü adı verilir. Yukardaki $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x^2$ fonksiyonu örneğini alacak olursak,



Şekil 11.
B'nin öngörüntüsü

Altkümeler Kümesi

Eğer X bir kümeyse, X'in altkümelerinden oluşan küme $\wp(X)$ olarak yazılır. Örneğin eğer $X = \{1, 2, 3\}$ ise

$$\wp(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1,2,3\}\}$$

dir. Demek ki, bu örnekte $\{1, 2\} \in \wp(X)$. Öte yandan $1 \notin \wp(X)$, çünkü 1, X'in bir altkümesi değil, sadece bir elemanı.

Bir başka örnek: $X = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ olsun. Bu sefer $\{1, 2\}$ kümesi hem X'in hem de $\wp(X)$'in bir elemanıdır.

Genel olarak, X kümesinin n elemanı varsa, $\wp(X)$ kümesinin 2^n elemanı vardır. Eğer tümevarımla kanıtın ne demek olduğunu biliyorsanız, bunu tümevarımla kanıt yönetiyle kolaylıkla kanıtlayabilirsiniz.

$\wp(\mathbb{N})$, $\wp(\mathbb{Z})$, $\wp(\mathbb{Q})$, $\wp(\mathbb{R})$ kümelerinin elemanlarını **teker teker** belli bir sırayla yazmak olanaksızdır. (Denemeyin! Sonsuzu Saymak yazısına bakın, sayfa 15) ama vardır böyle kümeler.

Örneğin, çift doğal sayılar kümesi $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$, $\wp(\mathbb{N})$, $\wp(\mathbb{Z})$, $\wp(\mathbb{Q})$ ve $\wp(\mathbb{R})$ kümelerinin herbirinin elemanıdır. Asal sayılar kümesi $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ de bu kümelerin birer elemanıdır.

Örneğin, $(3, 5)$ açık aralığı $\wp(\mathbb{R})$ kümesinin bir elemanıdır.

Elbette, X hangi küme olursa olsun, $\emptyset$ ve X, $\wp(X)$'in bir elemanıdır. ♠

$$f^{-1}(\{25\}) = \{-5, 5\}$$
$$f^{-1}(\{0, 25\}) = \{-5, 0, 5\}$$
$$f^{-1}(\{3\}) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$
$$f^{-1}((-1,0)) = \emptyset$$
$$f^{-1}([-1,0]) = \{0\}$$
$$f^{-1}([-1,1]) = [-1,1]$$

Böylece $f : X \to Y$ fonksiyonu, $\wp(X)$'ten $\wp(Y)$'ye ve $\wp(Y)$'den $\wp(X)$'e giden iki fonksiyon tanımlar. Pek doğru değil belki ama, bu fonksiyonlar da genellikle f ve f^{-1} olarak yazılır (oysa $f^{\sim}$ gibi hafifçe değişik bir biçimde yazılması daha doğru olurdu.)

Alıştırmalar.

i. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$ ise, $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ ilişkisini kanıtlayın.

ii. A_1 ve A_2 kümeleri X'in altkümeleriyse, $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ eşitliğini kanıtlayın.

iii. A_1 ve A_2 kümeleri X'in altkümeleriyse, $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ ilişkisini kanıtlayın. Eşitliğin her zaman doğru olmadığını gösterin. Eğer f birebirse eşitliğin doğru olduğunu gösterin.

iv. $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$ ise, $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ ilişkisini kanıtlayın.

v. B_1 ve B_2 kümeleri Y'nin altkümeleriyse, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ eşitliğini kanıtlayın.

vi. B_1 ve B_2 kümeleri Y'nin altkümeleriyse, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ ilişkisini kanıtlayın. ♠

Sonlu bir kümeden o kümenin altkümeler kümesine giden örten bir fonksiyon yoktur çünkü $2^n > n$ dir (tümevarımla kanıtlanabilir bu eşitsizlik.) Bu olgu çok daha genel olarak doğrudur:

Teorem. *Bir kümeden o kümenin altkümeler kümesine giden örten bir fonksiyon yoktur.*

Kanıt: X bir küme olan f, X kümesinden $\wp(X)$ kümesine giden örten bir fonksiyon olsun. Bir çelişki elde edeceğiz.

X'in şu altkümesine bakalım: $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.

Y, X'in bir altkümesi olduğundan, $\wp(X)$'in bir elemanıdır da aynı zamanda. f örten bir fonksiyon olduğundan, belli bir $x \in X$ için, $f(x) = Y$ olmalı. Şimdi, x, Y'nin bir elemanı mı değil mi sorusunu soralım, can alıcı soru!

$$x \in Y \Leftrightarrow x \notin f(x) \Leftrightarrow x \notin Y$$

(Birinci eşdeğerlik Y'nin tanımından , ikincisi $Y = f(x)$ eşitliğinden çıkıyor.) Bu bir çelişkidir. Demek ki X kümesinden $\wp(X)$ kümesine giden örten bir fonksiyon yoktur. ♠