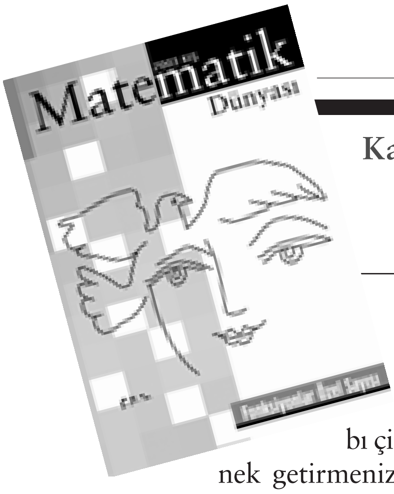


Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Seçim Fonksiyonları

Sonsuz sayıda ayakkabı çifti var ve biri sizden bu sonsuz sayıda ayakkabı çiftinden her birinden bir örnek getirmenizi istiyor... Her çiftten sol ayakkabıyı seçebilirsiniz örneğin. Ya da hep sağ ayakkabıyı... Yani iki ayakkabıdan birini seçmek için bir kural bulabilirsiniz.

Ama diyelim sonsuz sayıda ayakkabı çifti degil de, sonsuz sayıda çorap çifti var. Her çiftten birini seçeceksiniz. Çorapların sağı solu belli olmadığından bu sefer belli bir kural bulamazsınız. Çorapların biri sağda biri solda olsa, ya da biri üstte biri altta olsa, ya da biri yırtık biri sağlam olsa, o zaman kuralı koymak kolay. Sorun, sonsuz sayıda çorap çifti olduğunda ve çiftleri oluşturan çoraplardan birini diğerinden ayırdedemediğimizde.

Örneğin, $X = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, ...\}$ ise, X'in her elemanındaki en büyük sayıyı seçebiliriz

Eğer $X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, ...\}$ ise, 1, X'in her elemanında olduğundan, hep 1'i seçebiliriz.

Soruyu daha matematiksel olarak şöyle ifade edelim. Elinizde bir X kümesi var. Bu kümenin elemanları da küme, ve hiçbiri boş değil. X'in her elemanından bir örnek (numune, eşantiyon) seçeceksiniz. Bir başka deyişle, kalkış kümesi X olan öyle bir f fonksiyonu bulacaksınız ki, her $x \in X$ için, $f(x) \in x$ olacak. Böyle bir fonksiyona ***seçim fonksiyonu*** denir.

Sorumuz şu: *Boş olmayan kümelerden oluşan her kümenin bir seçim fonksiyonu var mıdır?*

Önce örneklerle sorunun zorluk derecesini ölçeceğiz. Sonra da sorunun özüne inip yanıtı vereceğiz.

Kolay Şıklar. Eğer X, boş olmayan kümelerden oluşan **sonlu** bir kümeyse, o zaman X'in bir seçim fonksiyonunu bulmak çok basittir: X'in her elemanından belli bir eleman seçin, olsun bitsin! Sorun X sonsuz olunca...

Eğer X'in elemanlarının ortak bir elemanı varsa, o zaman da kolay, hep o elemanı seçelim. Örneğin yukardaki örneklerden birinde, 1, X'in bütün elemanlarının ortak elemanıydı ve biz hep 1'i seçmiştik.

Eğer X'in her elemanında, a ve b diye adlandıracağımız iki elemandan biri varsa, o zaman da kolay: X'in bir x elemanını alalım. Eğer $a \in x$ ise a'yı seçelim. Eğer $a \notin x$ ise, o zaman x'ten b'yi seçelim.

$\wp(A)^*$, A'nın boş olmayan altkümelerinden oluşan küme olsun. Yani $\wp(A)^* = \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$. Çeşitli A'lar için $\wp(A)^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmaya çalışacağız.

Örnek 1. *$\wp(\mathbb{N})^*$ kümesinin seçim fonksiyonu.*
Boş olmayan her doğal sayı kümesinden bir eleman seçebiliriz; örneğin kümenin en küçük elemanını seçebiliriz. Sözgelimi, bu yöntemle, $\{1, 5, 8\}$ kümesinden 1'i, çift sayılar kümesinden 0'ı, asal sayılar kümesinden 2'yi seçeriz.

Örnek 2. *$\wp(\mathbb{Z})^*$ kümesinin seçim fonksiyonu.*
Boş olmayan her tamsayı kümesinden de belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. Örneğin şu yöntemi deneyelim: $\emptyset \neq x \subseteq \mathbb{Z}$ olsun; eğer x'in en büyük elemanı varsa o en büyük elemanı, yoksa $x \cap \mathbb{N}$ kümesinin en küçük elemanını seçelim. Böylece boş olmayan her tamsayı kümesinden bir eleman seçmiş olduk.

Örnek 3. *$\wp(\mathbb{Q}^{\geq 0})^*$ kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan bir pozitif kesirli sayılar kümesinden bir sayı nasıl seçeriz? Kümeye x diyelim. Şu kümeyi tanımlayalım:

$$A(x) = \{a + b : a/b \in x\}.$$

Boş olmayan bir doğal sayı kümesi olduğundan, $A(x)$'in en küçük elemanı vardır. Bu elemana n diyelim. Şimdi,

$$\{a/b \in x : a + b = n\}$$

kümesine bakalım. Bu, sonlu bir kesirli sayılar kümesidir, dolayısıyla bir en küçük elemanı vardır. İşte x'ten bu elemanı seçelim.

Örneğin,

$$x = \{a^2/b \in \mathbb{Q}^{\geq 0} : a \text{ asal ve } a^2 + b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\}$$

ise,

$$A(x) = \{a^2 + b : a \text{ asal ve } a^2 + b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\}$$

kümesidir. $A(x)$ kümesinin en küçük elemanı 7'dir ($a = 2$, $b = 3$.) Dolayısıyla yukarda açıkladığımız yöntemle x'ten 2/3'ü seçeriz. Bu seçim fonksiyonu aşağıda gerekecek, ona bir ad verelim: f. Örneğin, yukardaki örnekte, $f(x) = 2/3$.

Örnek 4. $\wp(\mathbb{Q})^*$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan kesirli sayı kümelerinden de birer eleman seçebiliriz. $x \subseteq \mathbb{Q}$ boş olmayan bir küme olsun. Eğer $x \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boş değilse, yukardaki yöntemi kullanalım ve $f(X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşkümeyse, $(-X) \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ kümesi boş değildir, o zaman da X'ten $-f((-X) \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim.

Genel olarak, eğer X sayılabilir bir kümeyse (bknz. Eşlemeler yazısı), $\wp(X)^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmak oldukça kolaydır. Nitekim, $f : X \to \mathbb{N}$ bir eşleme olsun. $\emptyset \neq x \subseteq X$ olsun. Eğer n, $f(x)$'in en küçük elemanıysa, x'ten $f^{-1}(n)$ elemanını seçeriz. (f, Örnek 3'teki seçim fonksiyonu.)

Örnek 5. *Aralıklar kümesinin seçim fonksiyonu.*

Reel sayılar kümesinin

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b),$$
$$(-\infty, a], (-\infty, a), [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, -\infty)$$

gibi altkümelerine ***aralık*** adı verilir. Reel sayıların boş olmayan aralıklarından da belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) aralıklarından "orta noktayı", yani $(a + b)/2$ noktasını, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ aralıklarından $a - 1$ noktasını, $[a, \infty)$, (a, ∞) aralıklarından $a + 1$ noktasını ve $(-\infty, -\infty)$ aralığından 0 noktasını (gene orta noktayı!) seçelim.


Kurt Gödel

Örnek 6. $\wp(\mathbb{R})^*$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

İşte en civcivli soruya geldik. Yukardaki örneklerde kimileyin kolayca kimileyin zorlanarak, her seferinde bir seçim fonksiyonu bulduk. Ama bu kez işler hiç kolay değil.

Hemen söyleyelim: $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulamazsınız. İstediğiniz kadar deneyin... Sadece siz değil, kimse bulamaz!

Bu kümenin seçim fonksiyonu yok demiyorum. Var da demiyorum...

Yoksa elbet bulamazsınız. Ama varsa da bulamazsınız!

Bu kümenin bir seçim fonksiyonunun olduğu ancak şu aksiyomla (belitle) kanıtlanabilir:

Seçim Aksiyomu (C): *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.*

Bu aksiyom kullanılarak $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonu olduğu kanıtlanabilir (elbet!), ama o seçim fonksiyonunun kuralı bulunamaz! Yani açık açık seçim fonksiyonunu yazamazsınız. Bir başka deyişle, varlığı (yukardaki aksiyom tarafından) kanıtlanan bir seçim fonksiyonunun kuralı yoktur. Olamaz da. Bu, Kurt Gödel tarafından kanıtlanmıştır.

Kurt Gödel, Seçim Aksiyomu'nun, kümeler kuramının diğer aksiyomlarından bağımsız olduğunu kanıtlamıştır. Şöyle açıklayayım:

Kümeler kuramının Seçim Aksiyomu dışındaki kabul edilen diğer aksiyomlarına **ZF** diyelim. (**Z**, Zermelo'nun Z'sidir, **F** de Fraenkel'in F'si) **ZF**'nin çelişkisiz olduğunun (gene **ZF**'nin aksiyomları kullanılarak) kanıtlanamayacağını Kurt Gödel kanıtlamıştır (1931). Gödel ayrıca şunu kanıtlamıştır (1940):

Eğer **ZF** *çelişkisizse*, *hem* (**ZF** + **C**) *hem de* (**ZF** + $\neg$**C**) *çelişkisizdir.*

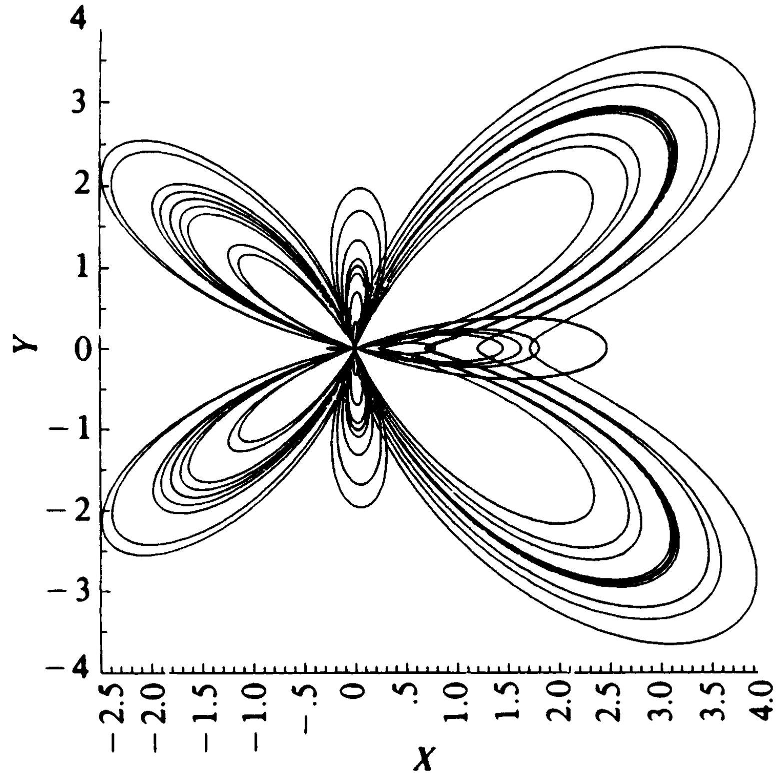
Bir başka deyişle, **ZF** kümeler kuramına ister **C**'yi istersek de **C**'nin değillemesini ekleyebiliriz ve çelişkisiz iki ayrı teori elde ederiz. Matematikçilerin çok büyük bir çoğunluğu **C**'yi kabul etmeden yana olmuşlar ve bugün artık **C** aksiyomu kabul edilmiştir. Bu yüzden, bugün kabul edilen ve kullanılan kümeler kuramı aksiyomlarına **ZFC** denir.

Seçim Aksiyomunun Kullanımı. Seçim aksiyomundan çok "doğal" sonuçlar çıkabildiği gibi hiç de doğal görünmeyen sonuçlar çıkar. Her ikisinden de birer örnek verelim.

"Doğal" Bir Sonuç. X sonsuz bir küme olsun. X'in sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi var mıdır? Yani X'ten öyle $x_0, x_1, x_2, x_3,...$ elemanları bulabilir miyiz ki, $\{x_0, x_1, x_2, x_3,...\}$ bir küme olsun? Seçim Aksiyomu olmadan böyle bir kümenin varlığını kanıtlanamaz. Zorluk şurdadır: $\{x_0, x_1, x_2, x_3,...\}$ diye bir nesne vardır. Bu nesnenin küme olduğunu kümeler kuramının **ZF** aksiyomlarıyla kanıtlamak gerekiyor. Seçim aksiyomu olmadan bu kanıtlanamaz. Bazı X kümeleri için kanıtlanabilir, ama her sonsuz küme için kanıtlanamaz. Küme olmanın bazı koşulları vardır. $\{x_0, x_1, x_2, x_3,...\}$ nesnesinin bu koşulları yerine getirdiğini kanıtlayamayız.

“Doğal olmayan” bir sonuç. 1 yarıçaplı bir küre alalım. Şimdi çok şaşırtıcı bir şey söyleyeceğim. Bu küreyi öyle beş parçaya bölebilirim ki ve bu beş parçayı döndürerek, öteleyerek, simetrisini alarak, yani hacim ve alan değiştirmeyen dönüşümlerden geçirdikten sonra öyle toparlayabilirim ki, parçalardan ikisinden yarıçapı 1 olan bir küre, geri kalan üçünden gene yarı çapı 1 olan bir küre elde edebilirim. Bu saçmasapan görünen teorem Seçim Aksiyomu’yla kanıtlanabilir ancak. Matematikte buna ***Banach-Tarski Paradoksu*** denir (ama aslında bir paradoks değildir, sadece şaşırtıcıdır, paradoksa benzer.) Beş parçanın hiçbirinin alanı olamaz elbet (yoksa alanı büyültemezdik.) Seçim aksiyomunun yardımıyla, $\mathbb{R}^3$ uzayının alanı hesaplanamayan altkümelerini bulabiliriz. ♠

! Vay Canına



$r = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + \sin^5(\theta/12)$