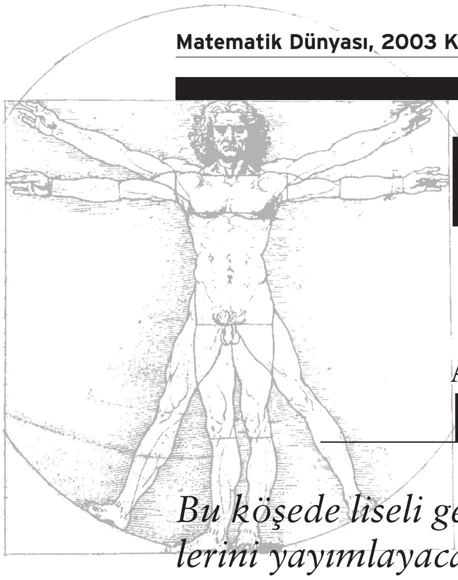

Proje Köşesi

Nihat Ayber*
aybern@mef.k12.tr

Aslıhan Akın ve Özgür Paksoy'un Projeleri

Fibonacci Sayıları

Bu köşede liseli gençlerimizin projelerini yayımlayacağız. Yayımlanmasını istediğiniz projelerinizi bize yollayın.

Bu sayımızda, Mef Okulları'ndan Aslıhan Akın'la Özgür Paksoy'un 2000 Tübitak Proje Yarışması'na sundukları **Gerçel Sayılar Kümesinde Tanımlanmış Bir İşlemin Fibonacci Sayılarına Uygulanışı** adlı çalışmalarından bir bölüm sunacağız.

Fibonacci'nin ününün nedeni Liber Abaci (Abaküs kitabı) adlı kitabında alıştırma olarak sorduğu şu sorudur: *Biri erkek biri dişi bir çift tavşanınız var, bir aylıkken çok genç olduklarından üreyemiyorlar, ama ikinci ayın sonunda erginleşip üremeye başlıyorlar. Her ay her çiftin biri erkek biri dişi olmak üzere yeni bir çift ürettiğini varsayalım. Tavşanlar bu şekilde üremeye devam ederlerse bir yıl sonunda kaç* ***çift*** *tavşanınız olur?* Sorunun devamı bu sorunun genelleştirilmiş halidir: *n ay sonunda kaç* ***çift*** *tavşanınız olur?*

Birinci ay 1 çift, ikinci ay üremediklerinden gene bir çift, bir sonraki ay iki çift... Her ayda kaç çift erişkin tavşan olduğunu hesaplarsak şu diziyi buluruz:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Görüldüğü üzere, üçüncüden itibaren her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir. Bu diziye **Fibonacci dizisi,** dizinin terimlerine de **Fibonacci sayıları** adı verilmiştir. Diziyi daha matematiksel olarak şöyle tanımlayabiliriz:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = f_2 = 1,$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Fibonacci sayıları aralarında birçok ilişki sağlarlar. Örneğin:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$
$$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$$
$$f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$
$$f_1 - f_2 + f_3 - \ldots + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1$$
$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$
$$f_3 + f_6 + \ldots + f_{3n} = \frac{f_{3n+2} - 1}{2}$$
$$f_{n+h} f_{n+k} - f_n f_{n+h+k} = (-1)^n f_h f_k$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$$

Bu eşitlikler ve daha başkaları bilinir. Aslıhan Akın'la Özgür Paksoy projelerinde aşağıdaki sonuçları bulmuşlar, daha doğrusu kanıtlamışlar:

Teorem 1. $m|n \Leftrightarrow f_m|f_n$.

Teorem 2. $EBOB(f_n, f_m) = f_{EBOB(n,\, m)}$

Projede daha daha ilginç şeyler de var.

Fibonacci dizisinden yararlanarak şu sonsuz kuvvet serisini oluşturalım:

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \, .$$

Bu seriyi z ve z^2 ile çarpalım ve

$$F(z) - zF(z) - z^2 F(z)$$

serisini hesaplayalım. Fibonacci dizisinin tanımını kullanarak, basit bir hesapla,

$$F(z) - zF(z) - z^2 F(z) = z$$

buluruz. Yani,

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} \, .$$

Eğer sağdaki "kesirli polinomu" yeniden seri biçiminde yazabilirsek, bu serinin katsayıları bize Fibonacci sayılarını verecektir. Bu yaklaşım kullanılan yöntemin özünü oluşturmaktadır.

* MEF Okulları matematik öğretmeni.

$$\frac{1}{1-\alpha z} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha z^3 + \ldots$$

eşitliğinin[1] altını çizdikten sonra,

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z} \qquad (*)$$

eşitliğini sağlayan A, B, α ve β sayılarını bulmaya çalışalım. Diyelim bu eşitliği sağlayan sayılar bulduk. Bakın o zaman neler oluyor:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z} \\ &= A(1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha z^3 + \ldots) + \\ &\quad B(1 + \beta z + \beta^2 z^2 + \beta z^3 + \ldots) \\ &= (A + B) + (A\alpha + B\beta)z + \\ &\quad (A\alpha^2 + B\beta^2)z^2 + (A\alpha^3 + B\beta^3)z^3 + \ldots \end{aligned}$$

yani

$$f_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

oluyor... f_n için bir formül bulmuş oluyoruz... A, B, α, β sayılarını bulmanın birçok yolu vardır. (*) denkleminin paydaları eşitlenerek elde edilen polinomların katsayılarına bakabiliriz. Ya da z'ye çeşitli değerler verebiliriz (dört bilinmeyen olduğuna göre en az dört değer vermek gerekir). Örneğin $z = 0$ alırsak, $A + B = 0$ buluruz, yani $B = -A$ ve böylece B'den kurtuluruz. Hatta her iki tarafı da $1 - \alpha z$ ile çarpıp z'yi sonsuza götürebiliriz. Hatta ve hatta $z = 1/\alpha$ alarak, sağ tarafı sonsuz yaparız, sol taraf da sonsuz olmak zorunda olduğundan, $1 - 1/\alpha - 1/\alpha^2 = 0$, yani $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ buluruz. Aynı şekilde $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ bulunur. Bunlardan da α ve β'nın $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olduğu çıkar. Dolayısıyla, ($\alpha \neq \beta$ olduğundan),

Leonardo Fibonacci
≈1175 - 1250

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

bulunur. Şimdi A ve B'yi bulmak kolay: $A = \pm 1/\sqrt{5}$, $B = -A = \mp 1/\sqrt{5}$. Demek ki artık f_n'nin bir formülü var. Bir seçim yapalım:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\alpha^{-1}$$

olsun. Demek ki,

$$f_n = \frac{\alpha^n + (-\alpha)^{-n}}{\sqrt{5}} .$$

Böylece, f_n Fibonacci sayıları için n'ye bağlı bir formül elde etmiş olduk.

Bu formülden şöyle bir sonuç elde edebiliriz: α^{-n} sayısının mutlak değeri 1'den küçük olduğu için, n'nin büyük değerleri için α^{-n} çok küçük olduğundan, f_n tamsayısı $\alpha^n/\sqrt{5}$ irrasyonel (kesirsiz) sayısına çok yakın olur. Örneğin,

$55 = f_{10} \approx \alpha^{10}/\sqrt{5} \approx 55{,}00364$,
$89 = f_{11} \approx \alpha^{11}/\sqrt{5} \approx 88{,}997775$.

Görüldüğü üzere oldukça başarılı bir çalışma. Ancak yerimizin darlığından dolayı bu projenin ikinci bölümünü bir sonraki sayımızda yayımlayacağız. İkinci bölüm esas itibariyle projenin ismini de taşıyan kısım olacak. Bu yazıyı bir soruyla bitirelim:

Soru: *$n > 2$ ise, f_m sayısının f_n^2 sayısına bölünebilmesi için gerek ve yeter şart nedir?* ♠

1 Tüm bu eşitliklerin matematiksel açıklaması ve kanıtı vardır. Ama bunu burada açıklamaya yerimiz yok. Bazı sayılar için geçerli olan bu eşitlikler "bilinmeyen" z'ler için de geçerlidir.

?

Kaç tane Fibonacci sayısının asal olduğu bilinmiyor, sonlu ya da sonsuz oldukları bile bilinmiyor.