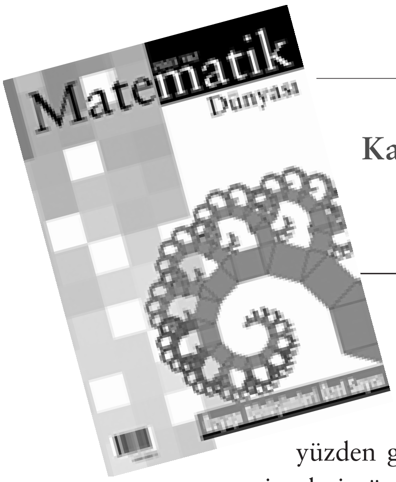
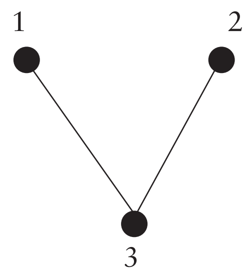


Kapak Konusu: Özyapı Dönüşümleri

Çizgelerin Özyapı Dönüşümleri

Özyapı dönüşümleri sanırım en kolay çizgelerle (graflarla) anlaşılır. Bu yüzden giriş yazısından sonraki ilk yazımız çizgelerin özyapı dönüşümleri olacak.

Örneklerle başlayalım. Matematiksel tanımı daha sonra vereceğiz.



Örnekler. Yandaki **çizge**ye (grafa) bakalım.

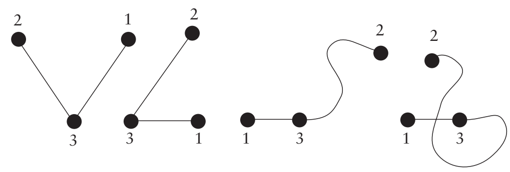
Bu çizgede üç **nokta** ve iki **bağıntı** vardır. Noktalarımıza 1, 2, 3 adını verdik. Ve 1 noktasıyla 3 noktası arasına, 2 noktasıyla 3 noktası arasına birer bağıntı koyduk. Demek ki iki bağıntımız var: 1-3 ve 2-3 bağıntıları.

Bu çizgeyi şöyle yorumlayabiliriz: Bir odada üç kişi var ve biz bu üç kişinin sadece ve sadece birbirini tanıyıp tanımadığıyla ilgileniyoruz, ya da bu üç kişi hakkında sadece bu bilgiye sahibiz. O üç kişiyi birer noktayla gösterelim ve bu nokta kişilere rastgele 1, 2, 3 adını verelim. Eğer iki kişi birbirini tanıyorsa, o iki kişiyi simgeleyen noktalar arasına bir çizgi çizelim. Demek, 1'le 3 tanışıyorlarmış. 2'yle 3 de tanışıyorlarmış. Ama 1'le 2 tanışmıyorlarmış. Bir insanın kendini tanımadığını varsayıp, bir noktayla kendisi arasına bir çizgi çekmemişiz.

Yukardaki çizgede 3 noktasını diğer iki noktadan ayıran bir özellik vardır, o da şu: 3 noktası çizgemizin iki bağıntılı tek noktasıdır. Demek ki 3 noktası özel bir noktadır ve o nokta kendine özgü bir adı haketmiştir. Bundan böyle herkes o noktaya 3 noktası demek zorundadır. "3" o noktanın adıdır. Başka bir ad da verebilirdik. Ama 3 adını vermiş olduk bir kere.

Peki, 1 noktasıyla 2 noktasını ayıran bir özellik var mıdır? 1 noktası solda, 2 noktası sağdadır. Ama ya bizim için noktaların sağda ya da solda olması önemli değilse? Nasıl tavukları sayarken kümesin sağındaki ve solundaki tavuklar diye bir ayrım yapmamız genellikle gerekmezse, bu çizgede de sağdaki ve soldaki noktalar arasında bir ayrım gözetmemiz önemli olmayabilir. Çizgenin sağıyla solu arasında bir ayrım yapmayalım. Altı ya da üstü diye de bir ayrım yapmayalım. Bağıntıların uzunluğu ya da eğimi ya da türü diye de bir ayrım yapmayalım. Bir çizgede bizim için sadece ve sadece bağıntıların varlığı ya da yokluğu önemli olsun.

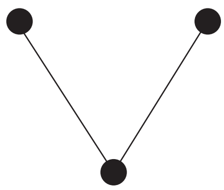
O zaman 1 noktasıyla 2 noktası arasında bir ayrım kalmaz. Bir başka gün, bir başka yerde, bir başkası yukardaki çizgeyi aşağıdaki şekillerdeki gibi çizebilirdi:



Yukardaki üç çizge arasında – çizgeler sadece bağıntılar açısından değerlendirildiklerinde – hiçbir ayrım yoktur. Bu yüzden bu çizgelere **eşyapısal** denir.

Şöyle anlatmaya çalışayım: Sadece bağıntıların önemli olduğu bir dünyada 1 noktasıyla 2 noktası arasında bir ayrım kalmaz ve bu noktalara verilecek adlar rastgeledir, geçicidir, uçucudur, önemsizdir, değişebilir…

Yukardaki çizgeden adları silersek, geriye kalan çizgede iki bağıntılı nokta hemen kendini belli eder. Nasıl kalabalık bir otobüste çok çok uzun boylu birini hepimiz farkediyorsak, bu çizgede de iki bağıntılı nokta kendini belli eder, bu özelliğe sahip tek bir nokta vardır.

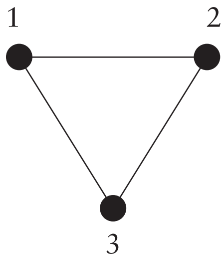


Sayıları tekrar yerlerine koyalım. 1 noktasını 2 noktasına, 2 noktasını 1 noktasına ve 3 noktasını 3 noktasına götüren dönüşüm (eşleşme) yukardaki çizgenin bir **özyapı dönüşümü**dür. Bu dönüşümü (12)(3) olarak gösterelim[1]. Bu çizgenin bir özyapı

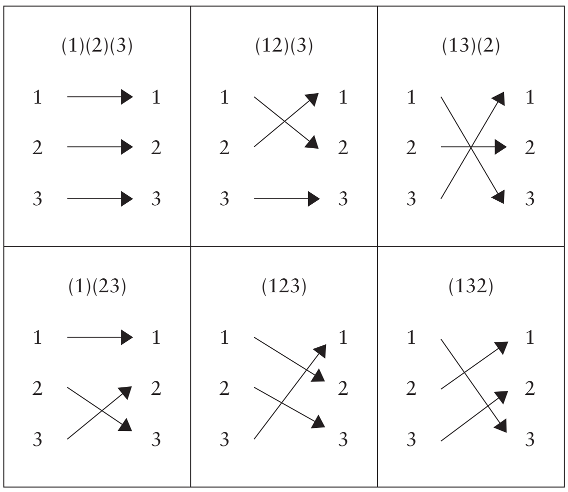
1 Geçen sayımızda bu yazılımların anlamını anlatmıştık.

dönüşümü 3 noktasını yerinden kımıldatamaz, çünkü 3 noktası o çizgenin çok özel bir noktasıdır; ama 1 ve 2 noktalarının yerlerini değiştirebiliriz.

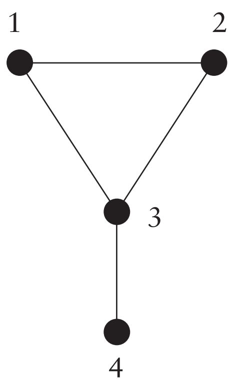
Bir çizgenin özyapı dönüşümlerinin matematiksel tanımını ilerde vereceğiz. Şimdilik örnekler üzerinde duralım. Yandaki çizgenin özyapı dönüşümlerini bulalım:



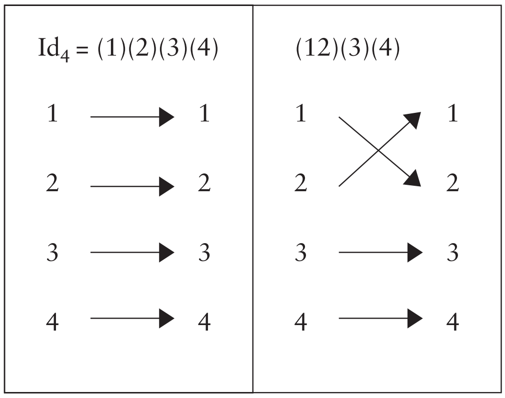
Bu kez hiçbir noktanın hiçbir noktaya göre bir özelliği kalmadı (herkes herkesi tanıyor.) Noktalar arasındaki her dönüşüm bu çizgenin bir **özyapı dönüşümü**dür. Örneğin, 1'i 2'ye, 2'yi 3'e, 3'ü 1'e götüren dönüşüm – (123) biçiminde yazılır bu dönüşüm – bu çizgenin bir özyapı dönüşümüdür. Bu çizgenin toplam altı özyapı dönüşümü vardır. İşte o altı dönüşüm:



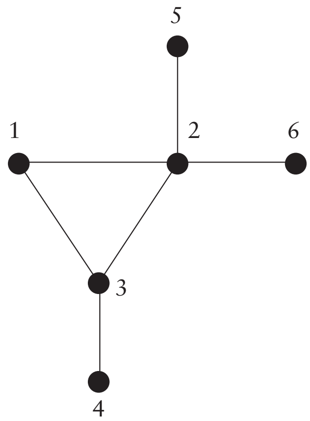
3'e bir kuyruk ekleyerek 3 noktasını diğer noktalardan ayrıştıralım (odaya sadece 3'ün tanıdığı biri girdi.)



Bu sefer 3 noktası diğer tüm noktalardan farklı oldu, çünkü 3 noktası üç bağıntısı olan (yani herkesi tanıyan) tek nokta. 4 noktası da tek bağıntısı olan (bir tek kişiyi tanıyan) tek nokta. Demek ki bu iki nokta özel adlarını haketmiş noktalar, diğerlerinde olmayan birer özelliğe sahipler. Bu noktalar bu iki ada sahip olmaya hakları var. Oysa 1 ve 2 noktaları adlarını haketmemişler, adlarını değiştirebiliriz. Bu çizgenin iki özyapı dönüşümü vardır:

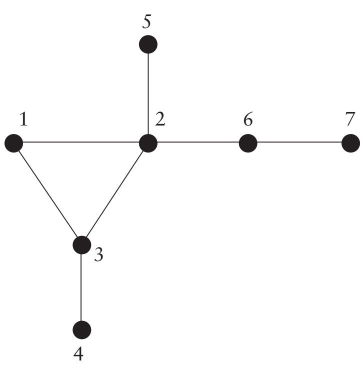


Şimdi 1 ve 2 numaralı noktaları ayrıştırmak için 2 noktasıyla bağıntılı iki yeni nokta ekleyelim (5 ve 6 adlı noktalar.)



Şimdi 2 özel bir nokta oldu, çünkü dört bağıntısı olan tek nokta bu nokta. 3 de özel, çünkü üç bağıntısı olan tek nokta bu nokta. 1 de özel, çünkü iki bağıntısı olan tek nokta. Ama 4, 5, 6 arasında bir ayrım var mı? Evet! En azından 4 noktası öbür noktalardan değişik. Şu nedenden: Tek bağıntılı olan 4, 5 ve 6 noktaları arasından bir tek 4 noktası 3 noktasına bağlanmıştır, 3 noktası da özel olduğundan, bu özelliği 4 noktasını özel kılar. Yani 4 noktası, tek bağıntısı olan ve üç bağıntısı olan bir noktaya bağlanmış tek noktadır, yani özel bir noktadır. Öte yandan 5 ve 6 noktaları arasında hiçbir ayrım yoktur. Bu çizgenin özyapı dönüşümleri (1)(2)(3)(4)(5)(6) ve (1)(2)(3)(4)(56) dönüşümleridir.

5 ve 6'yı ayrıştırmak için ne yapabiliriz? 6'ya bağlı yeni bir nokta ekleyelim.



Bakalım şimdi her nokta özel mi?

2 özel, çünkü 2, dört bağıntısı olan tek nokta.

3 özel, çünkü 3, üç bağıntısı olan tek nokta.

1 özel, çünkü 1, özel olduklarını bildiğimiz 2 ve 3 noktalarının her ikisine birden bağlanmış tek nokta. Ya da şöyle diyebiliriz: 1, iki bağıntısı olan ve üç bağıntılı bir noktaya bağlanmış tek noktadır.

4 de buna benzer bir nedenden özel: tek bağıntısı olan ve üç bağıntılı bir noktaya bağlanmış tek nokta.

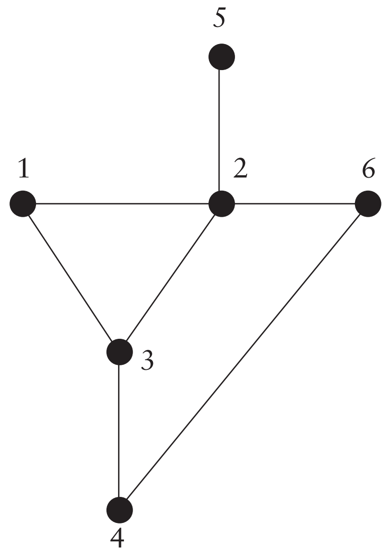
5 de özel: tek bağıntısı olan ve dört bağıntılı bir noktaya bağlanmış tek nokta.

6 da özel. Şu nedenden: Özel olduğunu bildiğimiz 2 noktasına dört nokta bağlanmış: 1, 3, 5 ve 6 noktaları. Bunlardan sadece 1 ve 6'nın ikişer bağıntısı var. Öte yandan, biraz önce de gördüğümüz gibi 1'in başka noktalarda bulunmayan bir özelliği var. Demek ki 6 noktası 1'in bu özelliğini sağlamıyor... Demek ki 6 da özel...

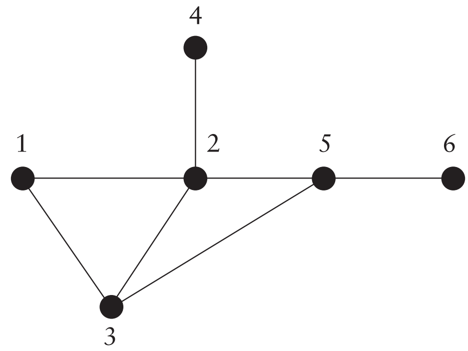
Bir tek 7 kaldı. Demek o da özel... Örneğin diğerlerinin özelliklerini paylaşmadığından... Ya da iki bağlantılı bir noktaya bağlanmış bir bağlantılı tek nokta olduğundan...

Sonuç olarak, yukardaki çizgenin tüm noktaları özel noktalar. Bu çizgenin bir tek özyapı dönüşümü vardır: hiçbir noktanın yerini değiştirmeyen (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) birim fonksiyonu.

Bir önceki çizge birim fonksiyondan başka özyapı dönüşümü olmayan en küçük çizge midir? Hayır! Altı noktalı daha küçük bir çizgenin de bu özelliği vardır. İşte o çizge:



Her noktasının özel olduğu bir başka çizge daha aşağıda.



Bu çizgelerin her noktasının özel olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Daha az noktalı ve her noktasının özel olduğu bir çizge var mı? Evet var! O da bir noktalı çizge[2]. Tek noktası olduğundan, o nokta o çizgenin özel noktasıdır!

Çizgenin Özyapı Dönüşümleri. Yeterince örnek verdik, artık bir çizgenin **özyapı dönüşümlerini** (otomorfizmalarını) tanımlayabiliriz. Bir çizgenin bir özyapı dönüşümü her şeyden önce o çizgenin noktalarından gene o çizgenin noktalarına giden bir eşleşmedir (yani birebir ve örten bir fonksiyondur.) Çizgelerin özyapı dönüşümlerinin bunun dışında bir özelliği daha vardır: Bir özyapı dönüşümü birbiriyle bağıntılı her A ve B nokta çiftini gene birbiriyle bağıntılı iki noktaya götürmeli. Dahası, eğer A ve B birbirleriyle bağıntılı değillerse, A ve B noktalarının gittikleri noktalar da birbiriyle bağıntılı olmamalı. Yani, bir çizgenin noktaları üstüne tanımlanmış bir f eşleşmesi, eğer, her A ve B nokta çifti için, "A ve B bağıntılı $\Leftrightarrow f(A)$ ve $f(B)$ birbiriyle bağıntılı" özelliğini sağlıyorsa bir özyapı dönüşümüdür.

Eğer özyapı dönüşümlerinin tanımında sadece

"A ve B bağıntılı $\Rightarrow f(A)$ ve $f(B)$ bağıntılı"

koşulunu kabul etseydik (yani "$\Leftrightarrow$" yerine sadece "$\Rightarrow$" eklemini alsaydık) görünürde daha genel bir kavram tanımlamış olurduk.

Bu koşulu sağlayan eşleşmelere **yarı özyapı dönüşümleri** diyelim.

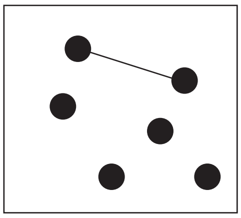
Soru 1. Eğer çizge sonluysa her yarı özyapı dönüşümünün bir özyapı dönüşümü olduğunu kanıtlayın.

Soru: Öyle bir çizge bulun ki, özyapı dönüşümü olmayan yarı özyapı dönüşümleri olsun.

2 Aslında sıfır noktalı, yani hiç noktası olmayan çizgenin de her noktası özeldir! Çünkü hiç noktası olmayan bir çizgenin, birbirinden farkı olmayan iki noktası yoktur!

Demek ki bir çizgenin bir özyapı dönüşümü noktalar arasında bir eşleşme olmalı ve bağıntılı noktaları bağıntılı noktalara, bağıntılı olmayan noktaları bağıntılı olmayan noktalara göndermelidir, başka da koşul yoktur.

Örneğin, her nokta her noktayla bağıntılıysa (ya da hiçbir nokta hiçbir noktayla bağıntılı değilse), noktalar arasındaki herhangi bir eşleşme bu çizgenin bir özyapı dönüşümüdür. Eğer n nokta varsa, bu dönüşümlerden $n!$ tane vardır, eşleşme sayısı kadar...



Bir başka örnek: Sadece iki nokta birbiriyle bağıntılıysa ve başka bir bağıntı yoksa, çizgenin özyapı dönüşümleri bağıntılı iki noktayı gene bu iki noktaya göndermeli ve öbür noktaları kendi aralarında dönüştürmeli. Eğer toplam n nokta varsa, bu çizgenin tam $2 \times (n-2)!$ tane özyapı dönüşümü vardır.

Noktalar arasındaki birim fonksiyon (yani her noktayı gene kendisine götüren fonksiyon) her zaman bir özyapı dönüşümüdür.

İki özyapı dönüşümünün bileşkesi gene bir özyapı dönüşümüdür.

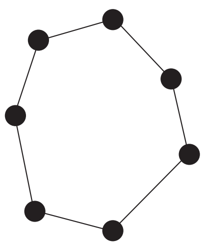
Bir özyapı dönüşümünün tersi de bir özyapı dönüşümüdür.

Bir A çizgesinin özyapı dönüşümleri kümesi Aut(A) olarak gösterilir

Sorular

Soru 1. Birim fonksiyonundan başka özyapı dönüşümü olmayan beş noktalı bir çizge var mıdır?

Soru 2. Sadece üç tane özyapı dönüşümü olan sonlu bir çizge bulun. Çizgenin nokta sayısı olabildiğince az olsun.

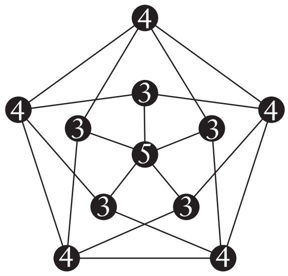


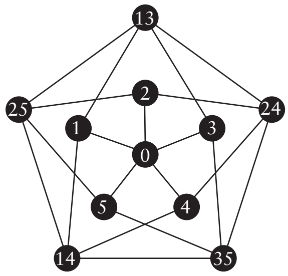
Soru 3. $n \geq 3$ olsun. n noktalı bir çizge tanımlayacağız. Noktalara 1, 2, ..., n diyelim. Bağıntılarımız soldaki çizge gibi dairesel olsun. Bu çizgenin tam $2n$ tane özyapı dönüşümü olduğunu kanıtlayın.

Soru 4. Her $n \geq 1$ tamsayısı için, tam n tane özyapı dönüşümü olan bir çizge bulun. Hatta öyle bir çizge bulun ki, belli bir φ özyapı dönüşümü için, çizgenin tüm özyapı dönüşümleri Id, φ, φ^2, ..., φ^{n-1} olsun.

Daha Daha Örnek

Örnek 1. Aşağıdaki (soldaki ya da sağdaki) çizgenin tüm özyapı dönüşümlerini bulalım.





Ortadaki nokta, bir özyapı dönüşümü altında ancak kendisine gidebilir, çünkü ortadaki nokta çizgenin beş bağıntılı tek noktası. Üçer bağıntısı olan beş nokta (soldaki resimde 3 ibaresiyle gösterilmiş) kendi aralarında dönüşebilirler ancak, ve bu noktaların nereye gittiklerini biliyorsak dört bağıntısı olan (soldaki resimde 4 ibaresiyle gösterilen) noktaların da nereye gittiğini buluruz, çünkü 4 ibareli noktaların herbiri sadece iki tane 3 ibareli noktayla bağıntılıdır. Yani 3 ibareli beş noktanın gidebilecekleri yerler özyapı dönüşümlerini belirler. 3 ibareli beş nokta yukardaki çizgenin bir özyapı dönüşümünü verecek biçimde kendi aralarında nasıl dönüşebilirler?

Noktaları sağdaki şekildeki gibi sayılandıralım ve bundan böyle sağdaki şekilden takip edelim. 0 numaralı nokta gene kendine gitmeli, bunu biliyoruz. 1, 2, 3, 4, 5 numaralı noktalar kendi aralarında dönüşmeli, bunu da biliyoruz. Bu beş noktanın nasıl dönüştüğünü biliyorsak, geri kalan 14, 35, 24, 13 ve 25 numaralı noktaların da nasıl dönüştüklerini buluruz. Örneğin (13)(45)(2) dönüşümü altında, 14 noktası 35 noktasına, 35 noktası gene 14 noktasına gider; 24 noktası 25 noktasına, 25 noktası gene 24 noktasına gider; 13 noktası da yerinde sayar.

Acaba 1, 2, 3, 4, 5 noktalarının herhangi bir eşleşmesi, çizgemizin bir özyapı dönüşümünü verir mi? Örneğin (12)(3)(4)(5) dönüşümü çizgenin bir özyapı dönüşümünü verir mi? Vermez, çünkü böyle bir dönüşüm altında 13 numaralı top 23 numaralı topa gitmek zorunda, ki böyle bir top yok!

Demek ki 1, 2, 3, 4, 5 numaralı topların herhangi bir dönüşümü bir özyapı dönüşümü vermiyor. Ya hangileri veriyor?

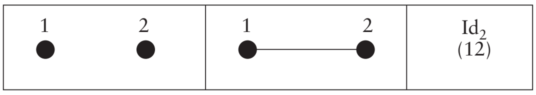
1, 2, 3, 4, 5 numaralı topların toplam 5! yani 120 tane dönüşümü vardır. Bunların yarısı (60 tanesi) yukardaki çizgenin bir özyapı dönüşümünü verir.

(1)(2)(3)(4)(5), yani Id_5 birim fonksiyon
(12)(34)(5) biçiminde yazılan 15 dönüşüm
(123)(4)(5) biçiminde yazılan 20 dönüşüm
(12345) biçiminde yazılan 24 dönüşüm.

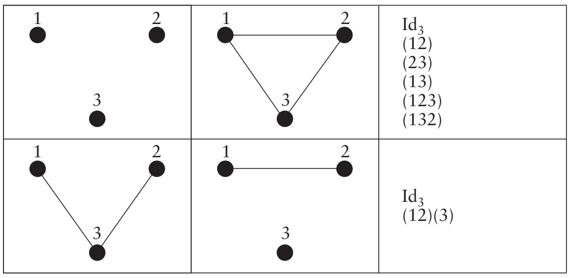
Örnek 2. Küçük Çizgeler

Aşağıda iki, üç ve dört noktalı çizgeleri ve bu çizgelerin özyapı dönüşümlerini bulacaksınız.

2.2. İki Noktalı Çizgeler: İki noktalı iki çizge var. İşte o iki çizge (solda ve ortada) ve o iki çizgenin özyapı dönüşümleri (iki adet, en sağda).



2.3. Üç Noktalı Çizgeler: Gerçek anlamda değişik (yani eşyapısal olmayan) sadece dört tane üç noktalı çizge var. Üç noktalı herhangi bir çizge aşağıdaki çizgelerden biriyle eşyapısaldır.



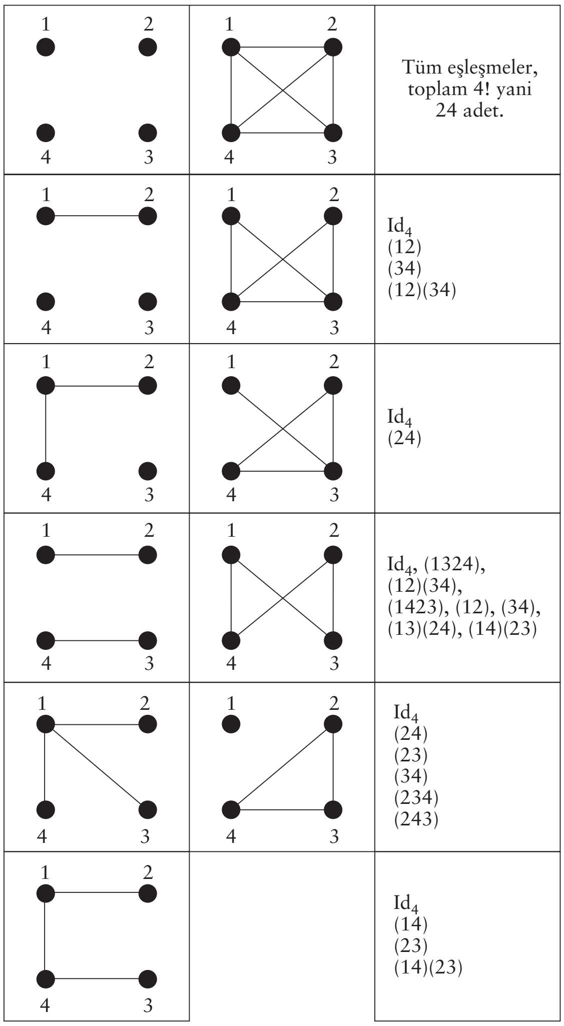
Bir başka deyişle üç kişi arasındaki tanışlık ilişkisi yukardaki dört tipten biri olmalı.

Sağdaki dönüşümler, soldaki çizgelerin özyapı dönüşümleridir.

2.4. Dört Noktalı Çizgeler: Eşyapısal olmayan toplam 11 tane dört noktalı çizge vardır. O 11 çizgeyi yandaki sütunda bulacaksınız.

Görüldüğü gibi dört noktalı çizgeler arasında her noktası özel olan (yani etkisiz göndermeden başka özyapı dönüşümünün olmadığı) bir çizge yok.

Dikkat ederseniz aynı satırda bulunan çizgeler birbirinin tam zıttı. Soldaki çizgede iki nokta arasında bağıntı varsa, sağdakinde yok. Soldakinde yoksa, sağdakinde var.



Örnek 3. Peterson Çizgesi.

X bir küme olsun. G, X'in iki elemanlı öğelerinden oluşan küme olsun. Örneğin,

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

ise

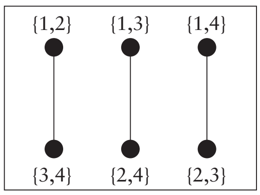
$$G = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

olsun.

G'nin elemanları arasına şu bağıntıyı koyalım: A ve B birbirleriyle bağıntılılar $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

Örneğin, bu tanıma göre $\{1,2\}$ ve $\{3,4\}$ bağıntılılar, çünkü $\{1,2\} \cap \{3,4\} = \varnothing$. Ama $\{1,2\}$ ve $\{1,3\}$ bağıntılı değiller, çünkü $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \neq \varnothing$.

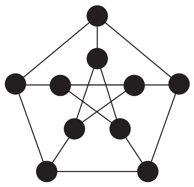
Tanımladığımız bu bağıntı G'ye bir çizge yapısı veriyor. Eğer X yukardaki gibi $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesiyse, o zaman çizgemiz şöyle olur:



Pek o kadar ilginç bir çizge değil… Gene de bu çizgenin kırk sekiz tane özyapı dönüşümü vardır. Pek de az sayılmaz… Bu kırk sekiz özyapı dönüşümünü okur kendi başına bulabilir. İpucu: Sopaların herbirini baş aşağı çevirebilir ($2^3 = 8$ tane) ve yerlerini değiştirebilirsiniz ($3! = 6$ tane) ve $48 = 8 \times 6$.

Şimdi $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi olsun. Bu sefer G'nin on öğesi var:

$$G = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}.$$

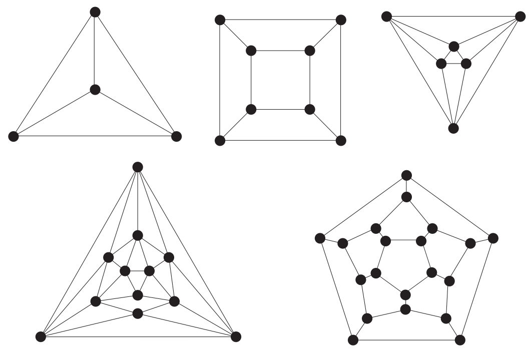


Çizgemizin resmi solda. Ünlü bir çizgedir bu. Kendine özgü bir adı da vardır: **Peterson Çizgesi.**

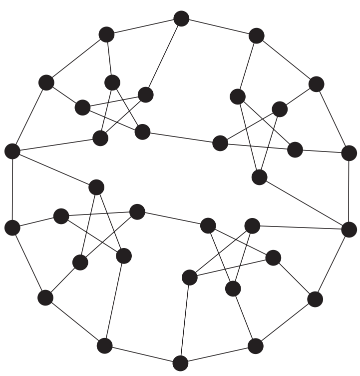
Soru: Peterson Çizgesi'nin tüm özyapı dönüşümlerini bulun.

Örnek 4. Platon Cisimlerinin Çizgeleri

Sırasıyla – soldan sağa – tetraedra, küp, oktaedra, ikozaedra ve dodekaedra çizgelerini aşağıda bulacaksınız. İlk üçünün özyapı dönüşümlerini bulmak pek zor değildir.



Bunlar beş Platon cisminin çizgeleri. Bu son derece ilginç cisimleri bir başka sayımızda konu etmek istiyoruz. O zamana kadar okur bu çizgelerin özyapı dönüşümlerini bulmak isteyebilir.



Örnek 5. İşte size ilginç bir çizge… Özyapı dönüşümlerini bulabilir misiniz? Şu işe bakın ki her noktanın üçer bağıntısı var…

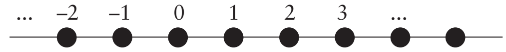
Örnek 6. Sonsuz Çizgeler.

Yukardaki çizge örnekleri sonluydu. Şimdi sonsuz çizge örnekleri verip özyapı dönüşümlerini bulacağız.

6.1. Noktalarımız doğal sayılar olsunlar. İki ardışık doğal sayı (nokta) arasına bir bağıntı koyalım. Bu tanıma göre 3 ve 4 noktaları birbiriyle bağıntılıdır, ama 3 ve 5 noktaları değildir. Çizgemizi çizelim:

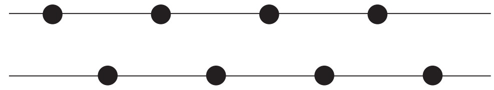
Bu çizgenin özyapı dönüşümlerini bulmak zor değil. Birinci nokta, yani 0 noktası tek bağıntısı olan tek nokta, dolayısıyla her özyapı dönüşümü 0 noktasını 0 noktasına yollamalı. Demek ki 1 noktası da 1 noktasına gitmeli. Her nokta ancak kendi üstüne gidebilir. Yani sadece etkisiz dönüşüm bu çizgenin bir özyapı dönüşümüdür, başka yoktur.

6.2. Yukarıdakine benzer bir çizge tanımlayacağız. Noktalarımız tamsayılar olsunlar. Ve iki ardışık tamsayı (nokta) arasına bir bağıntı koyalım. Çizgemizi çizelim:



Bu çizgenin özyapı dönüşümlerini bulmak zor değil. Noktaları ancak sağa ya da sola kaydırabiliriz. Yani her a tamsayısı için, $\tau_a(x) = x + a$ olarak tanımlanmış dönüşüm bir özyapı dönüşümüdür. Ayrıca $\rho_a(x) = -x + a$ dönüşümleri de özyapı dönüşümleridir. Ve bu çizgenin başka özyapı dönüşümü yoktur.

6.3. Yeni bir çizge daha tanımlayacağız. Yukardaki örneği hafifçe değiştirelim. Noktalarımız gene tamsayılar olsun. Eğer iki sayı arasındaki fark çiftse o iki sayı arasına bir bağıntı koyalım, yoksa koymayalım. O zaman şu çizgeyi elde ederiz:



Birinci örnekteki çizge ikiyle çarpıldı…

Soru: Bu çizgenin özyapı dönüşümlerini bulabilir misiniz? ♥