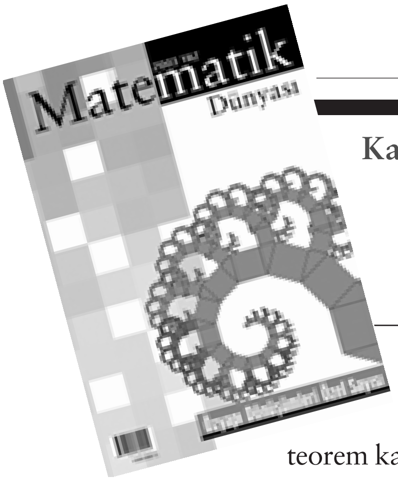


Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Bir Tane Rastgele Çizge Var!

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Bu yazıda ilginç olduğu kadar da şaşırtıcı bir teorem kanıtlayacağız. Kanıtlayacağımız teoremin felsefi bir yorumu da yapılabilir. Teoremimiz, bir anlamda, sonsuz zamanımız olduğunda ya da çok çok uzun bir zaman süreci sonunda, rastlantıların sonucunun hiç de rastlantısal olmadığını gösterecek. Göreceğimiz üzere, yüzbinlerce, yüz milyonlarca, yüz milyarlarca rastlantısal olay, son derece belirgin, aşağı yukarı önceden kestirilebilen bir sonuç doğurabiliyor.

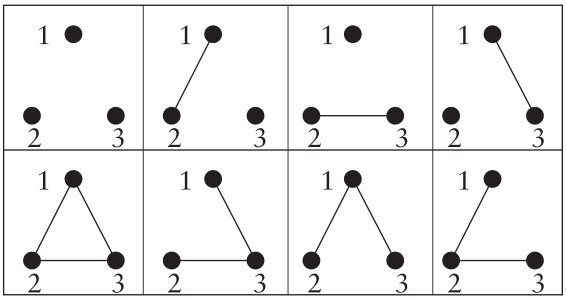
Size sonsuz tane nokta verdim:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

noktalarını. Bu noktalardan bir çizge yapmanızı istiyorum. Çizgeyi şöyle yapacaksınız: Her iki nokta için yazı-tura atacaksınız. Yazı gelirse o iki noktayı birleştireceksiniz, tura gelirse birleştirmeyeceksiniz. Her iki nokta için yazı-tura atmayı bitirdiğinizde (!) noktaların adlarını silin. Hangi noktanın 1 noktası, hangi noktanın 2 noktası olduğu belli olmasın. Elinizde adsız noktalar ve noktalar arasında birtakım çizgiler (bağımlılıkları) kalacak. Ben de aynı şeyi yapacağım. Sizin çizgenize bakmadan, sizden bağımsız... Böylece adsız iki **rastgele çizge** elde edeceğiz: Sizin rastgele çizgeniz ve benimkisi... Şimdi çizgelerimizi karşılaştıralım. İki çizgenin de aynı olduklarını göreceğiz. Tıpatıp birbirine benziyorlar! Sanki biri öbürünün hık demiş burnundan düşmüşten de öte... İnanılır gibi değil ama doğru! Ne sihirdir ne keramet, matematiktir matematik!

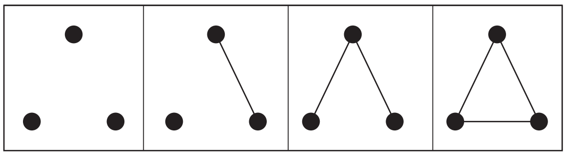
Dahası var. Diyelim, ben noktaları birleştirmek için yazı-tura atmadım da zar attım. 6 geldiğinde noktaları birleştirdim, gelmediğinde birleştirmedim. Sizse yazı-tura attınız. Noktaların adlarını sildiğimizde gene aynı çizgeleri elde ederiz!

Sonlu Rastgele Çizgeler. Üç nokta alalım. Noktalarımıza 1, 2, 3 diyelim. Üç noktayla sekiz değişik çizge yapabiliriz:



Üç nokta arasındaki bağıntılara yazı-tura atarak karar verecek olursak, yukardaki çizgelerden herbirini elde etme olasılığı 1/8'dir.

Bu çizgelerdeki noktaların adlarını, yani sayıları silersek, çizge sayımız azalır. Örneğin, bir bağıntısı olan üç çizgenin noktalarının adları silindiğinde hepsi birden tek bir çizge olurlar. Bunun gibi, iki bağıntısı olan üç çizgeden de bir adsız çizge elde ederiz. Böylece noktaların adlarını sildiğimizde geriye dört çizgemiz kalır:



Eğer çizgeyi yazı-tura atarak bulmuşsak, yani her bağıntının olasılığı 1/2 ise, bu adsız çizgelerin varolma olasılıkları sırasıyla 1/8, 3/8, 3/8 ve 1/8'dir.

Eğer sadece üçer noktamız olsaydı ve siz de ben de yazıtura atarak bağıntının varlığına ya da yokluğuna karar verseydik, ikimizin de aynı çizgeyi elde etme şansı

$$(1/8)^2 + (1/8)^2 + (3/8)^2 + (3/8)^2 = 20/64 = 5/16$$

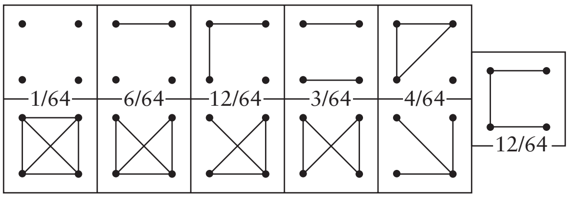
olurdu, yani aşağı yukarı 1/3.

Nokta sayımız arttıkça aynı çizgeyi elde etme olasılığımız belki artmaz ama, çizgelerimizin hatırı sayılır büyüklükteki altçizgeleri birbirinin eşi olur. Bu yazıda bunu ve daha fazlasını kanıtlayacağız.

---

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Yazarın Matematik ve Oyun adlı kitabındaki aynı başlıklı yazıdan uyarlanmıştır.

Dört noktalı çizgelerle deneyelim bir de. İşte dört noktalı çizgeler:



Çizgelere iliştirilen 1/64, 6/64, 12/64 gibi sayılar, bağıntılara karar vermek için yazı-tura atıldığında sayının altındaki ve üstündeki çizgelerin elde edilme olasılığıdır. Dört noktalı çizge sayısı $2^{4\times 3/2} = 2^6 = 64$'tür. Dört noktalı ve bir bağıntılı kaç çizge vardır? Dört noktadan ikisini seçip aralarına bir bağıntı koymamız gerekiyor. Demek ki

$$\binom{4}{2} = 6$$

tane bir bağıntılı çizge var. Herbirinin olasılığı 1/64 olduğundan, bir bağıntılı çizge elde etme olasılığımız 6/64'dır[1].

Sonsuz Rastgele Çizge(ler). Şimdi sonsuz rastgele çizgelere gelelim. *N* kümesi, 1, 2, 3, 4,... gibi pozitif doğal sayılardan oluşan küme olsun. Bunlar noktalarımız. İki nokta arasında bağıntı olup olmadığına karar vermek için yazı-tura atacağız. Bu çizgeye *R* adını verelim (*R*, "rastgele"nin R'si.) *R* çizgesi hakkında ne söyleyebiliriz? Rastgele çizge olduğundan hiçbir şey bilmemiz olası değil diye düşünebilir okur. İlk bakışta öyle bile görünse, ikinci bakışta *R* çizgesi üzerine çok şey bildiğimiz anlaşılır.

Basit bir örnekle başlayalım. Rastgele çizgenin herhangi iki noktası arasındaki "uzaklığın" en fazla iki olduğunu, yani bir noktadan bir başka noktaya üçüncü bir noktadan geçilerek (bağıntıları izleyerek elbet) gidilebileceğini kanıtlayalım.

R rastgele çizgesinde herhangi iki nokta alalım; diyelim 1 ve 2 noktalarını. Savım şu: *Öyle bir üçüncü nokta vardır ki, bu üçüncü nokta hem 1 noktasıyla, hem de 2 noktasıyla bağıntılıdır.* Savı kanıtlayalım. 3 noktasını ele alalım. Eğer şanslı bir günümüzdeysek, 3 noktası dilediğimiz gibi bir noktadır, yani hem 1 noktasıyla, hem de 2 noktasıyla bağıntılıdır. Bunun böyle olma olasılığı 1/4. Demek ki 1/4 olasılıkla, 3 noktası varlığını iddia ettiğimiz noktalardan biri olacak. Öte yandan 3/4 olasılıkla 3 noktası istediğimiz gibi bir nokta olmayacak. Şimdi 3 ve 4 noktalarını ele alalım. Bu iki noktadan hiçbirinin dilediğimiz gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^2$ tür. Eğer *n* tane nokta alırsak, bu *n* noktadan hiçbirinin dilediğimiz gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^n$ tür. Ama *n* büyüdükçe $(3/4)^n$ azalıyor, sıfıra yakınsıyor. Demek ki, 3, 4, 5, 6,... noktalarından hiçbirinin bizim istediğimiz gibi bir nokta olmama olasılığı

$$\lim_{n\to\infty} (3/4)^n = 0,$$

ve en az birinin istediğimiz gibi bir nokta olma olasılığı

$$\lim_{n\to\infty} (1 - (3/4)^n) = 1.$$

Dolayısıyla 1 olasılıkla dilediğimiz gibi bir nokta vardır. Demek ki sonsuz bir rastgele çizgede herhangi iki noktaya bağlanmış üçüncü bir nokta vardır.

Rastgele çizgeler üzerine bir başka sonuç daha kanıtlayalım. *R*, rastgele çizgeniz olsun. Noktaların adlarını silin. Sonra herhangi bir sonlu çizge alın, örneğin aşağıdaki 7 noktalı çizgeyi. Onun da adlarını silin. Bu adsız ve sonlu çizgeye *S* adını verelim. *S* sonlu çizgesi, rastgele çizgenizin bir altçizgesidir, yani *S* çizgesini *R* çizgesinin içinde bulabilirsiniz. Neden?

n Noktalı *k* Bağıntılı Çizge Sayısı

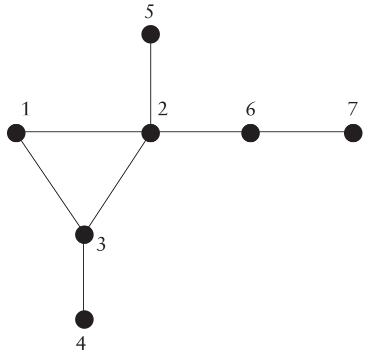
n noktalı bir çizgenin bağıntı sayısı 0'la $\binom{n}{2}$ arasında değişir, çünkü bağıntılar kümesi, *n* noktanın ikililerinden oluşur.

n noktalı ve *k* bağıntılı kaç çizge vardır? $\binom{n}{2}$ tane olası bağıntımız var. Bu $\binom{n}{2}$ tane olası bağıntıdan *k* tanesini seçeceğiz. Demek ki *n* noktalı ve *k* bağıntılı

$$\binom{\binom{n}{2}}{k}$$

tane çizge vardır. Elbette, noktaların adları silinince çizge sayısı çok düşer.

1 Bu 11 çizge rastgele konulmamıştır. Altalta gelen çizgeler birbirleriyle ilintilidir. Üst kattan herhangi bir çizgeyi alalım. Bu çizgenin bağıntılarını silelim ve bağıntı olmayan yerlere bağıntı koyalım. Böylece alt kattaki çizgeyi elde ederiz. En sağdaki çizge için aynı şeyi yapacak olursak gene aynı çizgeyi elde ederiz. Altalta gelen iki çizgenin olasılıkları aynıdır. Yazı-tura atıldığında aynıdır. Eğer zar atarak bağıntılara karar verecek olursak olasılıklar değişebilir. Örneğin, zar attığımızda 6 gelirse bağıntı koymaya, gelmezse bağıntı koymamaya karar verecek olursak, çizgenin bağıntı sayısı çoğaldıkça olasılığı azalır.



Şu nedenden: Rastgele çizgenizin noktalarını yedişer yedişer ayırın. Örneğin şöyle (noktaların adlarını silmiştik; aşağıdaki sayılar noktaların adları değil; yalnızca birbirinden değişik noktalar olduğunu vurgulamak için kullanıyoruz bu sayıları):

$R_0 = \{1, 2, ..., 7\}$
$R_1 = \{8, 9, ..., 14\}$
...
$R_n = \{7n + 1, 7n + 2, ..., 7n + 7\}$.

R_0 altçizgesine bakalım. Bu çizgenin S çizgesi olma olasılığı en az $1/2^{7\times 6/2}$ (neden?), olmama olasılığıysa en fazla $1 - 1/2^{7\times 6/2}$. Bu son olasılığa α diyelim.

$$0 < \alpha \leq 1 - 1/2^{7\times 6/2} < 1$$

eşitsizliklerine dikkatinizi çekerim. R_0 çizgesinin S çizgesi olmama olasılığı α. Demek ki R_0 ve R_1 çizgelerinden hiçbirinin S çizgesi olmama olasılığı α^2. Genel olarak, $R_0, ..., R_{n-1}$ çizgelerinden hiçbirinin S çizgesi olmama olasılığı α^n; en az birinin S olma olasılığı $1 - \alpha^n$. Neyse ki, α, 1'den küçük olduğundan, n arttıkça α^n sayıları küçülüp 0'a yakınsarlar[2]. Dolayısıyla $1 - \alpha^n$ sayıları 1'e yakınsar. Sonsuz tane R_n çizgesi olduğundan, bunlardan birinin S olma olasılığı 1'dir. Dolayısıyla, R çizgesinde S'ye tıpatıp benzeyen bir altçizge vardır.

Şaşırtıcı Teoremi Kanıtlıyoruz. Son olarak yazının başında iddia ettiğim savı kanıtlayalım. Sizin elinizde rastgele bir çizge var. Bu çizgeye R diyelim, noktalarınız da

$$a_1, a_2, a_3, a_4,...$$

olsun. Benim çizgeye R' diyelim. Noktalarım

$$a_1', a_2', a_3', a_3',...$$

olsun. Bu iki çizgenin noktalarının adlarını değiştireceğim. a ve a' noktalarını b ve b' yapacağım. Ve bu ad değiştirmeyi öyle yapacağım ki, noktaların adlarını sildiğimizde iki çizgenin birbirinin aynısı olduğu apaçık belli olacak. Bağıntılara dokunmayacağım. Yalnızca eski adları silip yeni adlar koyacağım yerine, daha sonra bu yeni adları da sileceğim.

Matematikte **gelgit yöntemi** denilen bir yöntem kullanacağım.

Birinci Adım. Birinci adımda dişe dokunur bir şey yapmayacağız. R çizgesinden başlayalım işe. a_1 noktasına b_1 diyelim bundan böyle. R' çizgesinde b_1'e benzeyen bir nokta bulabilir miyiz? Elbette! Herhangi bir nokta b_1'e benzer. Örneğin a_1' noktası. Bundan böyle a_1' noktasına b_1' adını verelim. Çizgelerimizin noktalarının adları şimdilik şöyle:

R:	b_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	...
R':	b_1'	a_2'	a_3'	a_4'	a_5'	a_6'	a_7'	...

İkinci Adım. Şimdi R' çizgesine geçelim. a_2' noktasına b_2' diyelim bundan böyle. Ve $\{b_1', b_2'\}$ altçizgesine bakalım. b_1' ve b_2' arasında bağıntı olabilir ya da olmayabilir. R çizgesinde öyle bir a_n noktası bulmak istiyorum ki $\{b_1, a_n\}$ çizgesiyle $\{b_1', b_2'\}$ çizgesi – noktalarının adları dışında – birbirinin aynı olsun. Diyelim b_1' ve b_2' arasında bir bağıntı var. O zaman, R çizgesinde öyle bir a_n noktası seçmeliyim ki, a_n noktasıyla b_1 noktası arasında bağıntı olsun. Böyle bir a_n noktası bulabilir miyim? 1 olasılıkla bulabileceğimi iddia ediyorum. R çizgesinin hiçbir noktasının b_1 noktasına bağıntılı olmama olasılığı sıfırdır. Bu şöyle anlaşılır. m herhangi bir doğal sayı olsun. $a_2, a_3, ..., a_{m+1}$ noktalarından hiçbirinin b_1 noktasıyla bağıntısı olmamasının olasılığı $1/2^m$ dir. Sonsuz tane noktamız olduğundan, noktalardan hiçbirinin dilediğim gibi bir nokta olmama olasılığı $\lim_{m\to\infty} 1/2^m = 0$ dır. Demek ki, 1 olasılıkla dilediğim gibi bir nokta vardır. Bu nokta a_2 olmayabilir, a_3 olmayabilir, belki a_4 de olmayabilir, ama bir tanesi b_1'e bağıntılı olacak. R çizgesinde böyle bir nokta seçelim. Diyelim a_4 noktası b_1 noktasına bağıntılı. a_4 noktasına bundan böyle b_2 diyelim. Şimdi

$$\{b_1, b_2\} \text{ ve } \{b_1', b_2'\}$$

altçizgeleri – noktalarının adları dışında – birbirinin aynıdır.

Eğer b_1' ile b_2' arasında bağıntı yoksa, R çizgesinde b_1 ile bağıntısı olmayan bir nokta seçilir ve bu noktaya b_2 adı verilir.

Çizgelerimizin noktalarını yeni adlarıyla sıralayalım:

R:	b_1	b_2	a_2	a_3	a_5	a_6	a_7	...
R':	b_1'	b_2'	a_3'	a_4'	a_5'	a_6'	a_7'	...

2 Eğer α sayısı $0 \leq \alpha < 1$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, n sonsuza gittiğinde, α^n sayıları sıfıra yakınsarlar. Bunu *Yakınsamak* başlıklı yazıda açıklamıştık.

Üçüncü Adım. R çizgesine geri dönelim. a_2 noktası; R çizgesinin adı değiştirilmeyen ilk noktası. Bu noktayı b_3 yapalım ve $\{b_1, b_2, b_3\}$ altçizgesine bakalım. Diyelim, b_3 ile b_2 bağıntılı, ama b_1 ile bağıntılı değil. R' çizgesinde öyle bir a_n' noktası bulacağız ki a_n' noktası b_2' ile bağıntılı olacak ama b_1' ile bağıntılı olmayacak. Eğer öyle bir a_n' bulabilirsek,

$$\{b_1, b_2, b_3\} \text{ ve } \{b_1', b_2', a_n'\}$$

altçizgeleri, noktalarının adları dışında, aynı çizge olacaklar.

Böyle bir a_n' noktası bulabilir miyiz? Evet! Biri olmazsa, bir başkası olmak zorunda. Çünkü $a_3', a_4', ..., a'_{m+2}$ noktalarından hiçbirinin dilediğimiz gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^m$ dir ve m sonsuza gittiğinde bu olasılık 0'a gider. Demek ki dilediğimiz gibi bir a_n' noktası bulma olasılığımız 1'dir. Diyelim a_6' noktası işimizi görüyor. a_6' noktasının adı bundan böyle b_3' olsun. Çizgelerimizin noktaları şimdi şöyle:

$$\begin{array}{llllllll} R: & b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & a_5 & a_6 & a_7 \;\; ... \\ R': & b_1' & b_2' & b_3' & a_3' & a_4' & a_5' & a_7' \;\; ... \end{array}$$

Dördüncü Adım. Bu kez R' çizgesinden işe başlayacağız. Adını değiştirmediğimiz ilk nokta a_3'. Bu noktaya b_4' diyelim bundan böyle. Şimdi R çizgesinde öyle bir a_n noktası bulalım ki,

$$\{b_1', b_2', b_3', b_4'\} \text{ ve } \{b_1, b_2, b_3, a_n\}$$

altçizgeleri – noktaların adlarını dikkate almazsak – aynı çizge olsunlar. Öyle bir a_n noktası 1 olasılıkla bulunabilir. Nasıl bulunur? Yukardaki gibi... Hiçbir a_n noktasının istediğimiz gibi bir nokta olmama olasılığı sıfırdır. Demek ki birinin dilediğimiz gibi bir nokta olma olasılığı birdir.

Böylecene sürdürürüz. Tek sayılı adımlarda R çizgesinden, çift sayılı adımlarda R' çizgesinden başlarız. Bu yöntemle ne benim çizgemden ne de sizin çizgenizden nokta unutulmaz.

Sonsuza dek sürdürdüğümüzde, noktalarımız b ve b' harfleriyle yazılmış olur ve her n için,

$$\{b_1, ..., b_n\} \text{ ve } \{b_1', ..., b_n'\}$$

altçizgeleri, adları dışında, birbirinin aynısıdır. Dolayısıyla, $\{b_1, b_2, b_3,...\}$ ve $\{b_1', b_2', b_3',...\}$ çizgeleri arasında – noktalarının adları dışında – hiç ama hiçbir ayrım yoktur.

Demek ki R ve R' çizgeleri arasında – noktalarının adları dışında – bir ayrım yoktur.

Ne kanıtladık? Sizin rastgele çizgenizle benim rastgele çizgem birbirinin eşidir. 1 olasılıkla!

Hatta şunu da söyleyebilirim: R çizgesinden bir noktayı ve bu noktanın bütün bağıntılarını silersek, elde ettiğimiz çizge de rastgele bir çizge olur, yani başlangıçtaki çizgeyle – noktalarının adları dışında – bir ayrım yoktur.

Sonuç: Yukarıdaki teoremin kanıtından şu çıkar: R rastgele çizgi olsun A ve B, R'nin sonlu iki alt çizgisi olsun. A ve B'nin birbirinin eşi (izomorf, eşyapısal) olduğunu varsayalım. Demek ki her x, $y \in A$ için "x ve y bağıntılıdır ancak ve ancak $f(x)$ ve $f(y)$ bağıntılıdır" koşulunu sağlayan $f: A \to B$ eşlemesi vardır. O zaman R'nin öyle bir φ özyapı dönüşümü vardır ki φ'nin A'ya kısıtlanışı f'dir.

Matematiksel bir deyişle rastgele çizge **homojen**dir. ♥

Rastgele Çizgenin Matematiksel Tanımı

Yazıda rastgele bir çizge yazı-tura gibi matematiksel olmayan bir kavramla tanımlandı. Rastgele çizgenin matematiksel tanımı şudur. R bir çizge olsun. Her n ve m doğal sayısı ve her $p_1, ..., p_n$ ve $q_1, ..., q_m$ noktaları için p_i'lerin herbiriyle bağıntılı olan ama q_j'lerin hiçbiriyle bağıntılı olmayan bir nokta varsa, o zaman R'ye **rastgele çizge** denir.