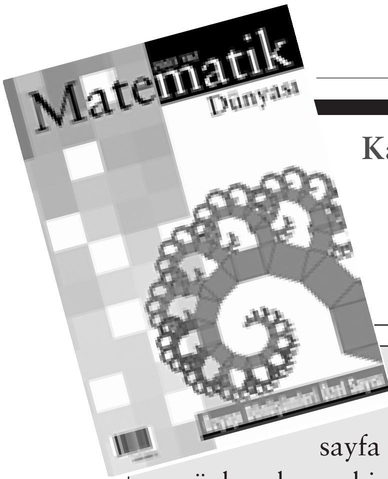

Kapak Konusu: Özyapı Dönüşümleri

Cahit Arf Matematik Günleri II

İkinci Gün / Mayıs 2003
Konu: Özyapı Dönüşümleri

Cahit Arf Matematik Günleri hakkında bilgi sayfa 80'de verilmiştir. Kısaca söylemek gerekirse, Cahit Arf Matematik Günleri, İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü tarafından düzenlenen, iki aşamalı, liselerarası ve oldukça kazık bir matematik yarışmasıdır. Aşağıda, ikinci aşamada sorulan sorular (ki bunlar özyapı dönüşümleriyle ilgilidir) ve bu soruların yanıtları verilmiştir[1].

Tanımlar:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ = doğal sayılar kümesi.

S = {1, 2, 3, ... } = sayma sayıları kümesi

$\mathbb{Z} = \{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$ = tamsayılar kümesi

$\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ = kesirli (rasyonel) sayılar kümesi

$\mathbb{R}$ = gerçel (reel) sayılar kümesi

X bir küme ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in X$ için,

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa f'ye **birebir fonksiyon** denir. Yani $f : X \to X$ fonksiyonunun birebir olması için yeter ve gerek koşul, her $x, y \in X$ için

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

koşulunu sağlamasıdır.

Eğer her $y \in X$ için, $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa o zaman f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir.

Eğer f hem birebir hem de örtense, f'ye **eşleşme** (bijeksiyon) denir.

Sorular ve Yanıtları

1. *$\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve her $x, y \in \mathbb{N}$ için*

$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

özelliğini sağlayan (yani sıralamaya saygı duyan) tüm eşleşmeleri bulun. (3 puan)

Yanıt: f, koşulu sağlayan bir eşleşme olsun. f'nin birim fonksiyonu $\text{Id}_{\mathbb{N}}$ olduğunu iddia ediyoruz.

Önce $f(0) = 0$ eşitliğini kanıtlayalım. Eğer $f(0) \neq 0$ ise, o zaman $0 < f(0)$ olur. $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ eşitliğini sağlasın (f örten olduğundan öyle bir x vardır). Demek ki $f(x) = 0 < f(0)$ ve soruda verilen koşula göre $x < 0$ olmalı, bir çelişki. Demek ki $f(0) = 0$.

Şimdi $n > 0$ olsun. $f(0) = 0, ..., f(n-1) = n-1$ eşitliklerini varsayarak $f(n) = n$ eşitliğini kanıtlayalım (tümevarımla kanıt). $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = n$ eşitliğini sağlasın (f örten olduğundan öyle bir x vardır.) Eğer $n < f(n)$ ise, o zaman $f(x) = n < f(n)$ ve soruda verilen özellikten dolayı $x < n$. Ama o zaman da, varsaydığımız eşitliklerden dolayı, $n = f(x) = x$, çelişki.

Eğer $n > f(n)$ ise, o zaman iki tarafa da f'yi uygulayarak, $f(n) > f(f(n)) = f(n)$ elde ederiz. (Birinci eşitsizlik soruda verilen özellikten dolayı, ikinci eşitsizlik varsaydığımız eşitliklerden dolayı), gene çelişki.

Demek ki $f(n) = n$.

2. *$\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden ve her $x, y \in \mathbb{Z}$ için*

$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

özelliğini sağlayan (yani sıralamaya saygı duyan) tüm eşleşmeleri bulun. (3 puan)

Yanıt: Herhangi bir n tamsayısı için, $t_n(x) = x + n$ eşitliğiyle tanımlanmış eşleme $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden ve soruda verilen özelliği sağlayan bir eşleşmedir. Bundan başka soruda verilen özelliği sağlayan bir eşleşme olmadığını kanıtlayacağız. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, verilen özelliği sağlayan herhangi bir eşleşme olsun. Eğer $a = f(0)$ ise, $t_{-a} \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu, verilen özelliği sağlayan bir başka eşleşmedir. Bu eşleşme ayrıca $(t_{-a} \circ f)(0) = 0$ eşitliğini sağlar:

$$(t_{-a} \circ f)(0) = t_{-a}(f(0)) = t_{-a}(a) = a - a = 0.$$

Şimdi, $t_{-a} \circ f$ eşleşmesi doğal sayıları doğal sayılara götürür ve doğal sayıların sıralamasına saygı duyar; dolayısıyla, birinci sorudan dolayı bu eşleşme doğal sayılar üzerine birim eşleşmedir. Aynı nedenlerden bu eşleşmenin $\mathbb{Z}$ üzerine birim eşleş-

1 Birinci aşamada sorulan sorular ileriki sayfalarda verilmiştir.

mesi olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir. Yani $t_{-a} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. Dolayısıyla $f = (t_{-a})^{-1} = t_a$.

3. *Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlayan (yani toplamaya saygı duyan, toplamsal olan) tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulun.* (5 puan)

Yanıt: f fonksiyonunun, belli bir $a \in \mathbb{Z}$ için, $f(n) = an$ kuralıyla tanımlandığını kanıtlayacağız.

Yukardaki gibi bir a varsa, bu a'nın $f(1)$ olması gerektiği açık: $f(1) = a1 = a$. Dolayısıyla a'yı $f(1)$ olarak tanımlayıp, her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = an$ eşitliğini gösterelim.

Önce $f(0) = 0$ eşitliğini kanıtlayalım: Soruda verilen eşitlikte $x = y = 0$ alırsak, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ buluruz. Bundan da $f(0) = 0$ çıkar. Demek ki $f(0) = 0 = a0$.

İkinci olarak, her n için, $f(-n) = -f(n)$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n).$$

Bu da oldu...

Üçüncü olarak kanıtımızı bitirelim. Herhangi $x_1, ..., x_n$ tamsayıları için, $n = 1$ ve 2 için doğru olduğunu bildiğimiz $f(x_1 + ... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$ eşitliği n üzerinden tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır. Dolayısıyla $x_1 = ... = x_n = x$ alırsak, her $n \in \mathbf{S}$ ve her $x \in \mathbb{Z}$ için, $f(nx) = nf(x)$ eşitliğini bulmuş oluruz. Burada $x = 1$ alırsak,

$$f(n) = f(n1) = nf(1) = na = an$$

bulunur. Demek ki $n \geq 0$ için, $f(n) = an$ eşitliği doğru. Eğer $n < 0$ ise, $m = -n$ yazalım ve hesaplayalım:

$$f(n) = f(-m) = -f(m) = -(am) = a(-m) = an.$$

Demek ki $f(n) = an$ eşitliği her zaman doğru.

Dikkat edilirse, aynı kanıt her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını da veriyor. Aradaki tek fark $a = f(1)$ sayısının tamsayı yerine herhangi bir gerçel sayı olabileceği.

4. *Her $x, y \in \mathbb{Q}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarını bulun.* (7 puan)

Yanıt: $f(1) = a$ olsun. Her $x \in \mathbb{Q}$ için, $f(x) = ax$ eşitliğini kanıtlayacağız.

Aynen üçüncü sorudaki gibi, her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = an$ ve her $n \in \mathbf{S}$ ve her $x \in \mathbb{Q}$ için, $f(nx) = nf(x)$ eşitlikleri kolaylıkla kanıtlanır.

Şimdi x herhangi bir kesirli (rasyonel) sayı olsun. Belli bir $n \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbf{S}$ için $x = n/m$ yazabiliriz. Şimdi $an = f(n) = f(m \times n/m) = mf(n/m)$, dolayısıyla $f(n/m) = an/m$, yani $f(x) = ax$.

Dikkat edilirse, aynı kanıt her $x, y \in \mathbb{Q}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını da veriyor. Aradaki tek fark $a = f(1)$ sayısının kesirli bir sayı yerine herhangi bir gerçel sayı olabileceği.

5. *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ve $f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eşleşmelerini bulun.* (10 puan)

Yanıt: Verilen koşulu sadece birim fonksiyonun sağladığını kanıtlayacağız.

$f(1) = a$ olsun. Sadece toplama özelliğini gözönünde bulundurarak, aynen dördüncü sorudaki gibi, her $x \in \mathbb{Q}$ için $f(x) = ax$ eşitliğini gösterebiliriz. Ama çarpma özelliğinden,

$$a = f(1) = f(1 \times 1) = f(1) \times f(1) = a^2.$$

çıkar. Demek ki $a = 0$ ya da 1. Ama f birebir olduğundan $a \neq 0$. Demek ki $a = 1$. Dolayısıyla eğer $x \in \mathbb{Q}$ ise, $f(x) = x$.

Şimdi f fonksiyonunun gerçel sayıların sıralamasını da bozmadığını kanıtlayacağız. Önce şuna dikkat edelim: $x \leq y$ eşitsizliği için gerek ve yeter koşul $x + z^2 = y$ eşitliğini sağlayan bir $z \in \mathbb{R}$ olmasıdır. Demek ki eşitsizlik ilişkisi gerçel sayılarda toplamayla ve çarpmayla ifade edilebiliyor. Dolayısıyla, $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

doğrudur.

Herhangi bir x reel sayısı alalım. x'i onluk tabanda yazdığımızda açıkça görüleceği üzere, her n için öyle a_n ve b_n kesirli sayılar vardır ki, $a_n \leq x \leq b_n$ ve $b_n - a_n \leq 10^{-n}$. Birinci eşitsizliklere f'yi uygularsak $a_n = f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n) = b_n$ elde ederiz. Bu ve ikinci eşitsizlikten $f(x) = x$ çıkar.

6. *X herhangi bir küme olsun. $\wp(X)$, X'in altkümeleri kümesi olsun. Her $f : X \to X$ fonksiyonu için $\varphi_f : \wp(X) \to \wp(X)$ fonksiyonunu ($A \in \wp(X)$ için)*

$$\varphi_f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

olarak tanımlayalım. Eğer f bir eşleşmeyse, φ_f de bir eşleşmedir kolayca kanıtlanacağı üzere.

Her $A, B \in P(X)$ için,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

özelliğini sağlayan bir $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ eşleşme-

sinin, belli bir $f : X \to X$ eşleşmesi için, φ_f'ye eşit olduğunu kanıtlayın. (7 puan)

Yanıt: i. Önce $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayacağız. $\varphi(A) = \emptyset$ olsun (φ örten olduğundan böyle bir A var.) A'nın herhangi bir B altkümesini alalım. Verilen koşuldan dolayı, $\varphi(B) \subseteq \varphi(A) = \emptyset$, yani $\varphi(B) = \emptyset$. Demek ki $\varphi(B) = \emptyset = \varphi(A)$. Bundan da, φ birebir olduğundan, $B = A$ çıkar. A'nın bir tek altkümesi olduğunu kanıtladık. Demek ki $A = \emptyset$.

ii. Şimdi, tek elemanlı kümelerin tek elemanlı kümelere gittiğini göstereceğiz. $A = \{x\}$ olsun. B, $\varphi(A)$'nın bir altkümesi olsun. C, $\varphi(C) = B$ eşitliğini sağlasın (φ örten olduğundan, böyle bir C vardır.) Demek ki $\varphi(C) = B \subseteq \varphi(A)$. Soruda verilen koşuldan dolayı $C \subseteq A$. Ama A tek elemanlı bir küme. Dolayısıyla ya $C = \emptyset$ ya da $C = A$. Sonuç olarak, ya $B = \varphi(C) = \varphi(\emptyset) = \emptyset$ ya da $B = \varphi(C) = \varphi(A)$. Demek ki $\varphi(A)$'nın sadece iki altkümesi var: $\emptyset$ ve $\varphi(A)$. Dolayısıyla $\varphi(A)$ tek elemanlı bir kümedir.

iii. Eğer $x \in X$ ise, $\varphi(\{x\})$ kümesinin tek elemanlı olduğunu yukarda kanıtladık. $\varphi(\{x\})$ kümesinin o tek elemanına $f(x)$ diyelim: $\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$. Böylece X'ten X'e giden bir f fonksiyonu tanımlamış oluruz.

Eğer $a \in A \subseteq X$ ise, $\{a\} \subseteq A$, dolayısıyla $\{f(a)\} = \varphi(\{a\}) \subseteq \varphi(A)$ ve $f(a) \in \varphi(A)$. Dolayısıyla $f(A) \subseteq \varphi(A)$. Daha eşitliği bilmiyoruz.

φ birebir olduğundan, f'nin de birebir olduğu kolaylıkla kanıtlanır. Öte yandan daha f'nin örten olduğunu da bilmiyoruz.

iv. Şimdi f'nin örten olduğunu kanıtlayacağız. $a \in X$ olsun. $A = \{a\}$ olsun. X'in B altkümesi $\varphi(B) = A$ eşitliğini sağlasın (φ örten olduğundan böyle bir B vardır.) B'nin tek elemanlı bir küme olduğunu kanıtlayacağız. Soruda verilen koşuldan ve φ'nin birebir olmasından dolayı B'nin sadece iki altkümesi vardır: Eğer $C \subseteq B$ ise, $\varphi(C) \subseteq \varphi(B) = A = \{a\}$, yani ya $\varphi(C) = \emptyset = \varphi(\emptyset)$ ya da $\varphi(C) = A = \varphi(B)$, yani ($\varphi$ birebir olduğundan) ya $C = \emptyset$ ya da $C = B$. İki altkümesi olan kümeler tek elemanlı kümeler olduğundan B'nin tek bir elemanı vardır. Eğer $b \in B$ ise, $\{f(b)\} = \varphi(\{b\}) = \varphi(B) = A = \{a\}$ ve $f(b) = a$. Demek ki f örtenmiş. Şimdi artık f'nin bir eşleşme olduğunu biliyoruz.

v. Artık, her $A \subseteq X$ için, $f(A) = \varphi(A)$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. iii'te $f(A) \subseteq \varphi(A)$ ilişkisini kanıtladık. $b \in \varphi(A)$ olsun. $f(a) = b$ eşitliğini sağlayan a elemanını alalım (iv'te f'nin örten olduğunu kanıtlamıştık.) $\varphi(\{a\}) = \{f(a)\} = \{b\} \subseteq \varphi(A)$ olduğundan, soruda verilen koşuldan dolayı, $\{a\} \subseteq A$, yani $a \in A$, yani $b = f(a) \in f(A)$. Demek ki $\varphi(A) \subseteq f(A)$.

Şimdi artık, her $A \subseteq X$ için, $\varphi(A) = f(A)$ eşitliğini biliyoruz. Yani $\varphi = \varphi_f$.

7. *$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$|x - y| = |f(x) - f(y)|$$

koşulunu sağlayan tüm eşleşmeleri bulun. (10 puan)

8. *$\mathbb{R}^2$'den $\mathbb{R}^2$'ye giden ve noktalar arasındaki uzaklığı değiştirmeyen tüm eşleşmeleri bulun.* (15 puan)

Yanıt 7-8: Seyfi Türkelli'nin bu sayıdaki *Mesafeyi Değiştirmeyen Dönüşümler-İzometriler* yazısına bakın (sayfa 28).

9. *$\mathbb{R}^2$'den $\mathbb{R}^2$'ye giden ve "P, Q, R aynı doğru üzerinde $\Leftrightarrow$ $f(P)$, $f(Q)$, $f(R)$ aynı doğru üzerinde" koşulunu sağlayan (yani doğruları doğrulara götüren) tüm eşleşmeleri bulun.* (30 puan)

Yanıt: Ali Seyfi'nin bu sayıdaki *Doğrudan Şaşmayan Dönüşümler* yazısına bakın (sayfa 32). ♥

Daha Zor Soru

X herhangi bir küme olsun. $\wp(X)$, X'in altkümeler kümesi olsun. Altıncı soruda, $\wp(X)$'den $\wp(X)$'e giden ve her $A, B \in \wp(X)$ için (yani X'in her A ve B altkümeleri için),

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşulunu sağlayan φ eşleşmeleri sorulmuştu ve arkasından da yanıt verilmişti: Bu tür eşleşmeler bir elemanlı kümeleri bir elemanlı kümelere götürürler, ve eğer $f : X \to X$ fonksiyonu, her $x \in X$,

$$\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$$

eşitliğiyle tanımlanmışsa, o zaman f, X'ten X'e giden bir eşleşmedir ve her $A \in \wp(X)$ için,

$$\varphi(A) = f(A)$$

eşitliği geçerlidir. Bir başka deyişle yukardaki koşulu sağlayan $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ eşlemeleri aslında X'ten X'e giden eşlemeler tarafından belirlenirler.

Şimdi daha zor bir soru soruyoruz:

Her $A, B \in \wp(X)$ için,

$$A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşulunu sağlayan tüm $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ eşleşmelerini bulun.

Soruyu en doğru ve en güzel yanıtlayanlar arasında çekilecek kurada kazanan okurumuza çeşitli armağanlar sunacağız. ♥