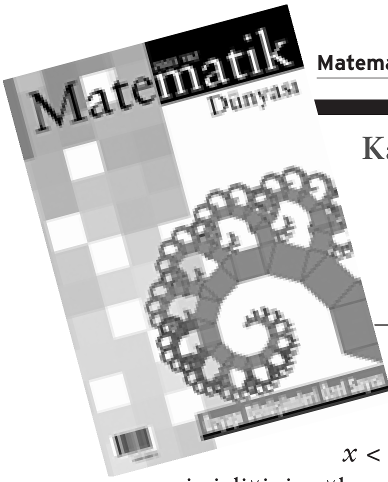


Kapak Konusu: Özyapı Dönüşümleri

Kesirli Sayılarda Sıralamanın Özyapı Dönüşümleri

Önceki yazılardan birinde[1], her $x, y \in \mathbb{N}$ için
$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$
eşitsizliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eşleşmelerini bulduk. Sadece $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ vardı, başka yoktu. Bunu şöyle yazarız:
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{N}, <) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}\}.$$
Sol taraftaki $\mathrm{Aut}(\mathbb{N}, <)$ doğal sayıların sıralamaya göre özyapı dönüşümleri kümesini simgeler[2].

Sonra aynı şeyi $\mathbb{Z}$ için yaptık. Bu kez sadece ötelemeler bulduk, yani belli bir $a \in \mathbb{Z}$ için $t_a(x) = x + a$ kuralıyla verilen $t_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eşleşmelerini, başka yoktu. Bunu da şöyle yazarız:
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, <) = \{t_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z}\}$$
Sol taraftaki $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, <)$ tamsayıların sıralamaya göre özyapı dönüşümleri kümesini simgeler.

Kimi okur neden aynı soruyu $\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesi için sormadığımızı merak etmiş olabilir. Neden $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ kümesini bulmadık? Önemli bir nedeni vardı gerçekten de. Açıklayalım.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{N}, <)$ kümesinin sadece bir elemanı var, $\mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısından az, çok daha az...

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, <)$ kümesinin eleman sayısı sonsuzdur belki ama $\mathbb{Z}$'nin eleman sayısından daha fazla değildir; şöyle daha fazla değildir: $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, <)$ ile $\mathbb{Z}$ arasında bir eşleşme vardır: t_a ötelemesini a sayısına götüren fonksiyon bu iki küme arasında bir eşlemedir.

Son iki paragrafı şöyle ifade edebiliriz: $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ sayı kümelerinin sıralamayı koruyan eşleşmelerinden (yani sıralamanın özyapı dönüşümlerinden) "az" vardır, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerinin eleman sayısından daha fazla değil. Oysa $\mathbb{Q}$'nün sıralamayı koruyan eşleşmeleri, birazdan göreceğimiz üzere, "çok çok çok daha fazla"dır. Bir başka deyişle $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ kümesinden $\mathbb{Q}$'ye giden birebir bir fonksiyon yoktur. Bu yazıda bunu kanıtlayacağız.

Şöyle kanıtlayacağız: $\mathbb{N}$'nin her altkümesi için, $(\mathbb{Q}, <)$ yapısının değişik bir özyapı dönüşümünü bulacağız; yani $\mathbb{N}$'nin altkümeler kümesi $\wp(\mathbb{N})$'den $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ kümesine giden birebir bir fonksiyon tanımlayacağız. Geçen sayımızda – bir anlamda – $\wp(\mathbb{N})$'nin eleman sayısının $\mathbb{N}$'den fazla olduğunu (sayfa 10) ve $\mathbb{N}$'nin eleman sayısının $\mathbb{Q}$'nün eleman sayısına eşit olduğunu (sayfa 16) göstermiştik. Demek ki $\wp(\mathbb{N})$'den $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ kümesine giden birebir bir fonksiyon bulabilirsek, o zaman $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ kümesinin eleman sayısının $\mathbb{Q}$'nün eleman sayısından – bir anlamda – daha fazla olduğunu göstermiş olacağız.

Önce $\mathbb{Q}$'nün sıralamayı koruyan eşleşmelerinden birkaç örnek bulalım.

Örnek 1. Ölçeklendirme (Homoteti). a, 0'dan büyük kesirli bir sayı olsun. $\mathbb{Q}$'nün $x \mapsto ax$ eşleşmesi sıralamayı korur.

Örnek 2. Ötelemeler. $b \in \mathbb{Q}$ olsun. $\mathbb{Q}$'nün
$$x \mapsto x + b$$
eşleşmesi sıralamayı korur.

Örnek 3. Bunların Bileşkeleri. Yukardaki iki örneğin bileşkelerini alalım, yani $a \in \mathbb{Q}^{>0}$ ve $b \in \mathbb{Q}$ için, $\mathbb{Q}$'nün $x \mapsto ax + b$ eşleşmelerine bakalım. Bu eşleşmeler de sıralamayı korurlar.

Yukardaki örneklerde $\mathbb{Q}$'nün sıralamayı koruyan eşleşmelerini bulduk ama "pek fazla" bulduğumuz söylenemez. Birazdan çok daha "fazla"sını bulacağız.

Kısmi Örnek. Bu yazıda (ve sadece bu yazıda), $[a, b] = \{q \in \mathbb{Q} : a \le q \le b\}$ olarak tanımlanmış olsun.

Şimdi k, a ve b birer kesirli sayılar olsunlar. $a < b$ eşitsizliğini varsayalım. Bu üç sayıyı kullanarak $[k, k + 1]$ aralığıyla $[a, b]$ aralığı arasında sıralamayı koruyan bir $f_{k,a,b}$ eşlemesi bulacağız. İşte o eşleme:
$$f_{k,a,b}(x) = (b - a)x + a - k(b - a)$$

1 Cahit Arf Günleri II, ikinci gün, soru 1, sayfa 23.
2 Cahit Arf Günleri II, ikinci gün, soru 2, sayfa 23.

Sıralamayı koruyan bu eşlemeler aslında yukarda tanımladığımız eşleşmelere benzerler: Önce sayıyı $b - a$ ile çarpıyoruz (ölçeklendirme), sonra çıkan sonuca $a - k(b - a)$ ekliyoruz (öteleme).

Çok Örnek. Şimdi durmadan artan ve birinci terimi 0 olan **herhangi** bir doğal sayılar dizisi alalım. Yani

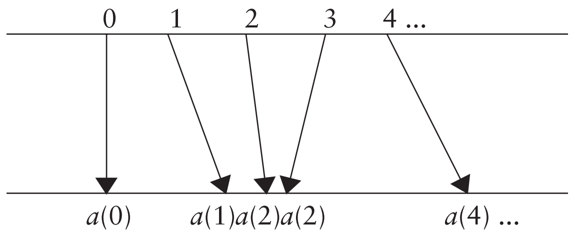
$$0 = a(0) < a(1) < a(2) < \ldots < a(k) < \ldots$$

koşullarını sağlayan **herhangi** bir $a = (a(k))_{k\in\mathbb{N}}$ doğal sayı dizisi alalım. Bu diziyi temel alarak $\mathbb{Q}$'den $\mathbb{Q}$'ye giden ve sıralamayı koruyan bir dönüşüm tanımlayacağız. Yukarda tanımladığımız ve sıralamayı koruyan

$$f_{k,\, a(k),\, a(k+1)} : [k, k + 1] \to [a(k), a(k+1)]$$

eşleşmelerini anımsayıp, $\mathbb{Q}$'den $\mathbb{Q}$'ye giden şu eşleşmeye bakalım:

$$f_a(x) = \begin{cases} x & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \\ f_{k,a(k),a(k+1)}(x) & \text{eğer } a(k) \le x \le a(k+1) \text{ ise} \end{cases}$$



Tanımladığımız bu f_a fonksiyonu $\mathbb{Q}$'nün sıralamasına saygı duyar. Ayrıca,

$$f_a(k) = a(k)$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim; yani a doğal sayı dizisi f_a fonksiyonunu belirlediği gibi, f_a fonksiyonu da a doğal sayı dizisini belirler. Bir başka deyişle, bu paragrafta, durmadan artan doğal sayılar dizisi kadar $\mathbb{Q}$'nün sıralamaya saygı duyan eşleşmesi bulduk. Durmadan artan doğal sayılar kümesi de $\mathbb{N}$'nin sonsuz altkümeleri kadar olduğundan, $\mathbb{N}$'nin her sonsuz altkümesi için $\mathbb{Q}$'nün sıralamayı koruyan bir eşleşmesini bulduk.

Aynı şeyi $\mathbb{N}$'nin sonlu altkümeleri için de yapabiliriz. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. ♥

Toplamayla Çarpma Arasında Fark Yoktur

a pozitif herhangi bir gerçel sayı olsun.

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$$

fonksiyonu,

$$\exp_a(x) = a^x$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $\exp_a$ fonksiyonunun iki önemli özelliği vardır:

1) $\exp_a$ bir eşlemedir.
2) Toplamayı çarpmaya dönüştürür:

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y).$$

$\exp_a$ bir eşleme olduğundan tersi de vardır. Tersine $\log_a$ adı verilir. Örneğin $\log_{10}(1000) = 3$'tür, çünkü $\exp_{10}(3) = 10^3 = 1000$'dir, $\exp_{10}$, 3'ü 1000'e götürdüğünden, tersi olan $\log_{10}$ fonksiyonu 1000'ü 3'e geri gönderir. $\log_{10}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine gider ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $\log_a$ bir eşlemedir.
2) Çarpmayı toplamaya dönüştürür:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Bu ne demektir? Bu şu demektir: Gerçel sayıları toplamayla pozitif gerçel sayıları çarpmak arasında bir fark yoktur! Eğer exp ve log fonksiyonlarını biliyorsanız... Örneğin x ve y gerçel sayılarını şu yöntemle çarpabilirsiniz:

$$xy = \exp_a(\log_a(x) + \log_a(y))$$

Görüldüğü gibi $\exp_a$, $\log_a$ ve toplamayı biliyorsanız, çarpmayı da biliyorsunuz demektir.

Ayrıca, $\exp_a$, $\log_a$ ve çarpmayı biliyorsanız, toplamayı da biliyorsunuz demektir:

$$x + y = \log_a(\exp_a(x)\exp_a(y))$$

Ayrıca bu şu demektir: $\mathbb{R}$'deki toplama işleminin her özelliğine $\mathbb{R}^{>0}$'daki çarpma işlemi de sahiptir, tabii toplamayı çarpma ve 0'ı 1 yaparsanız. Bir başka deyişle, $(\mathbb{R}, +, 0)$ matematiksel yapısıyla $(\mathbb{R}^{>0}, \times, 1)$ matematiksel yapısı eşyapısaldır (izomorfturlar).

Büyük Sayılarla Küçük Sayıları Çarpmak Arasında Fark Yoktur

$(0, 1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarını ele alalım. Bu iki küme de çarpma altında kapalıdır; örneğin, $x, y \in (0, 1)$ ise, $xy \in (0, 1)$'dir.

$f : (0, 1) \to (1, \infty)$ fonksiyonu $f(x) = 1/x$ kuralıyla tanımlansın. f fonksiyonunun aşağıdaki iki özelliği vardır:

1) f bir eşlemedir.
2) Her $x, y \in (0, 1)$ için, $f(xy) = f(x)f(y)$.

Demek ki bu iki küme arasında, çarpma işlemi bakımından bir fark yoktur. ♥