

Sıralamayı koruyan bu eşlemeler aslında yukarıda tanımladığımız eşleşmelere benzerler: Önce sayıyı $b - a$ ile çarpıyoruz (ölçeklendirme), sonra çıkan sonuca $a - k(b - a)$ ekliyoruz (öteleme).

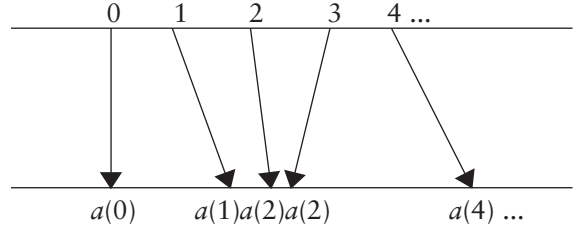
Çok Örnek. Şimdi durmadan artan ve birinci terimi 0 olan herhangi bir doğal sayılar dizisi alalım. Yani

$$0 = a(0) < a(1) < a(2) < \dots < a(k) < \dots$$

koşullarını sağlayan herhangi bir $a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}}$ doğal sayı dizisi alalım. Bu diziyi temel alarak \mathbb{Q} 'den \mathbb{Q} 'ye giden ve sıralamayı koruyan bir dönüşüm tanımlayacağız. Yukarıda tanımladığımız ve sıralamayı koruyan

$f_{k, a(k), a(k+1)} : [k, k + 1] \rightarrow [a(k), a(k+1)]$ eşleşmelerini anımsayıp, \mathbb{Q} 'den \mathbb{Q} 'ye giden şu eşleşmeye bakalım:

$$f_a(x) = \begin{cases} x & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \\ f_{k, a(k), a(k+1)}(x) & \text{eğer } a(k) \leq x \leq a(k+1) \text{ ise} \end{cases}$$



Tanımladığımız bu f_a fonksiyonu \mathbb{Q} 'nün sıralamasına saygı duyar. Ayrıca,

$$f_a(k) = a(k)$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim; yani a doğal sayı dizisi f_a fonksiyonunu belirlediği gibi, f_a fonksiyonu da a doğal sayı dizisini belirler. Bir başka deyişle, bu paragrafta, durmadan artan doğal sayılar dizisi kadar \mathbb{Q} 'nün sıralamaya saygı duyan eşleşmesi bulduk. Durmadan artan doğal sayılar kümesi de \mathbb{N} 'nin sonsuz altkümeleri kadar olduğundan, \mathbb{N} 'nin her sonsuz altkümeleri için \mathbb{Q} 'nün sıralamayı koruyan bir eşleşmesini bulduk.

Aynı şeyi \mathbb{N} 'nin sonlu altkümeleri için de yapabiliriz. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. ♥

Toplamayla Çarpma Arasında Fark Yoktur

a pozitif herhangi bir gerçel sayı olsun.

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$$

fonksiyonu,

$$\exp_a(x) = a^x$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. \exp_a fonksiyonunun iki önemli özelliği vardır:

- 1) \exp_a bir eşlemedir.
- 2) Toplamayı çarpmaya dönüştürür:

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y).$$

\exp_a bir eşleme olduğundan tersi de vardır. Tersine \log_a adı verilir. Örneğin $\log_{10}(1000) = 3$ 'tür, çünkü $\exp_{10}(3) = 10^3 = 1000$ 'dir, \exp_{10} , 3'ü 1000'e götürdüğünden, tersi olan \log_{10} fonksiyonu 1000'ü 3'e geri gönderir. \log_{10} fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ kümesinden \mathbb{R} kümesine gider ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- 1) \log_a bir eşlemedir.
- 2) Çarpmayı toplamaya dönüştürür:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Bu ne demektir? Bu şu demektir: Gerçel sayıları toplamayla pozitif gerçel sayıları çarpma arasında bir fark yoktur! Eğer \exp ve \log fonksiyonlarını biliyorsanız... Örneğin x ve y gerçel sayılarını şu yöntemle çarpabilirsiniz:

$$xy = \exp_a(\log_a(x) + \log_a(y))$$

Görüldüğü gibi \exp_a , \log_a ve toplamayı biliyorsanız, çarpmayı da biliyorsunuz demektir.

Ayrıca, \exp_a , \log_a ve çarpmayı biliyorsanız, toplamayı da biliyorsunuz demektir:

$$x + y = \log_a(\exp_a(x)\exp_a(y))$$

Ayrıca bu şu demektir: \mathbb{R} 'deki toplama işleminin her özelliğine $\mathbb{R}^{>0}$ 'daki çarpma işlemi de sahiptir, tabii toplamayı çarpma ve 0'ı 1 yaparsanız. Bir başka deyişle, $(\mathbb{R}, +, 0)$ matematiksel yapısıyla $(\mathbb{R}^{>0}, \times, 1)$ matematiksel yapısı eşyapılıdır (izomorfturlar).

Büyük Sayılarla Küçük Sayıları Çarpma Arasında Fark Yoktur

$(0, 1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarını ele alalım. Bu iki küme de çarpma altında kapalıdır; örneğin, $x, y \in (0, 1)$ ise, $xy \in (0, 1)$ 'dir.

$f : (0, 1) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu $f(x) = 1/x$ kuralıyla tanımlansın. f fonksiyonunun aşağıdaki iki özelliği vardır:

- 1) f bir eşlemedir.
- 2) Her $x, y \in (0, 1)$ için, $f(xy) = f(x)f(y)$.

Demek ki bu iki küme arasında, çarpma işlemi bakımından bir fark yoktur. ♥