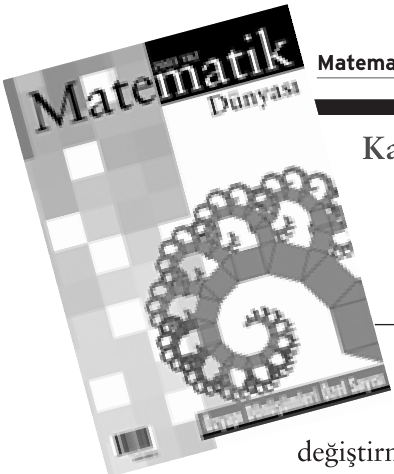


Kapak Konusu: Özyapı Dönüşümleri

Doğrudan Şaşmayan Dönüşümler

Ali Seyfi*

Bir önceki yazımızda $\mathbb{R}^2$ düzleminin uzaklığı değiştirmeyen dönüşümlerini bulduk. O yazıdaki teoreme (ikincisine) bakıldığında, bu dönüşümlerin doğruları doğrulara yolladığı anlaşılır, çünkü ötelemeler, simetriler ve döndürüler doğruları doğrulara yollarlar.

Bu yazıda $\mathbb{R}^2$ düzleminin doğruları doğrulara yollayan birebir dönüşümlerini, yani her ℓ doğrusu için, $f(\ell) = \ell'$ ilişkisini sağlayan sağlayan bir ℓ' doğrusunun bulunduğu dönüşümleri sınıflandıracağız (ℓ' doğrusu her ℓ için değişir, yoksa f birebir olamaz.)

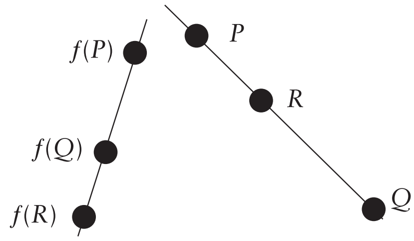
Yukardaki özelliği olan bir f dönüşümü paralel doğruları paralel doğrulara götürmek zorundadır. Nitekim, eğer ℓ ve m paralel doğrularsa ve $f(\ell) = \ell'$ ve $f(m) = m'$ ise ve $P \in \ell' \cap m'$ ise, o zaman, belli bir $Q \in \ell$ ve $R \in m$ için $f(Q) = P = f(R)$ olmak zorunda; ve f birebir olduğundan $Q = R \in m \cap \ell$, çelişki.

Bu yüzden (paralel doğruları paralel doğrulara götürdüğünden) bu dönüşümler, $\mathbb{R}^2$ Öklid geometrisinin özyapı dönüşümleri olarak düşünülebilir.

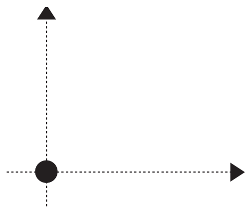
Heyecanı kaybetmemek için sonucu şimdiden söylemeyeceğiz.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yukardaki gibi bir dönüşüm olsun. Demek ki her $P, Q \in \mathbb{R}^2$ için, f, PQ doğrusunu $f(P)$ ve $f(Q)$'dan geçen doğruya yolluyor, yani $f(PQ) = f(P)f(Q)$.

f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ göndermesi şu özelliği sağlasın: Her ℓ doğrusu için, $f(\ell) \subseteq \ell'$ ilişkisini sağlayan bir ℓ' doğrusu vardır (ℓ' doğrusu her ℓ için değişebilir.) Eğer f birebir değilse, f, düzlemin tüm noktalarını önceden verilmiş bir doğrunun üstündeki noktalara yollar (hepsini aynı noktaya da yollayabilir.) Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

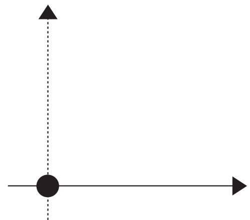


Birinci Adım. Bir önceki yazıdaki gibi f'nin bir ötelemeyle bileşkesini alıp, f'nin $(0, 0)$ noktasını gene $(0, 0)$ noktasına götürdüğünü varsayabiliriz. Şöyle yaparız: $f(0, 0) = (a, b)$ ise ve $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu (ötelemesi) $f(x, y) = (x - a, y - a)$ olarak tanımlanmışsa, f yerine $t \circ f$ dönüşümünü alıp, f'nin doğruları doğrulara götürdüğünü, ayrıca $(0, 0)$ noktasını yerinden kımıldatmadığını varsayabiliriz.



Birinci adımda (0, 0) noktası sabitlenmiştir.

İkinci Adım. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ doğruları doğrulara götüren ve $(0, 0)$ noktasını kımıldatmayan bir dönüşüm olsun. O zaman $(0, 0)$'dan geçen doğrular f altında gene $(0, 0)$'dan geçen doğrulara giderler. $(0, 0)$ merkezli bir döndürüyle x eksenini gittiği yerden aynen geri getirebiliriz, yani öyle bir ρ döndürüsü bulabiliriz ki, $\rho \circ f$ dönüşümü doğruları doğrulara götürür, $(0, 0)$ noktasını sabit tutar ve ayrıca x eksenini gene x eksenine yollar[1].



İkinci adımda sabitlenenler: (0, 0) noktası ve x ekseni (küme olarak)

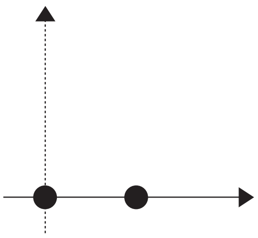
* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü 5. sınıf öğrencisi.

1 Uzmana Not: Eğer $\mathbb{R}$ yerine başka bir cisim alırsak, bu adımda döndürü kullanamayız, ama doğrusal bir dönüşümle x eksenini x eksenine götürebiliriz.

Görüldüğü gibi f dönüşümünü yavaş yavaş özdeşliğe benzetiyoruz.

Üçüncü Adım. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, doğruları doğrulara götüren, $(0, 0)$ noktasını kımıldatmayan ve x eksenini x eksenine götüren bir dönüşüm olsun. $(1, 0)$ noktası, belli bir $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için, $(a, 0)$ noktasına gider. $r_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $r_a(x, y) = (a^{-1}x, y)$ olarak tanımlansın. r_a fonksiyonu, aynen f gibi, doğruları doğrulara götürür, $(0, 0)$ noktasını $(0, 0)$ noktasına götürür, x eksenini gene x eksenine götürür. Şimdi $r_a \circ f$ dönüşümüne bakalım. Bu dönüşüm de doğruları doğrulara götürür, $(0, 0)$ noktasını $(0, 0)$ noktasına götürür, x eksenini gene x eksenine götürür, ama ayrıca $(1, 0)$ noktasını gene $(1, 0)$ noktasına götürür.

> r_a fonksiyonu $y = mx + b$ denklemli doğruyu, $y = max + b$ denklemli doğruya ve $x = c$ denklemli doğruyu $x = a^{-1}c$ denklemli doğruya götürür.



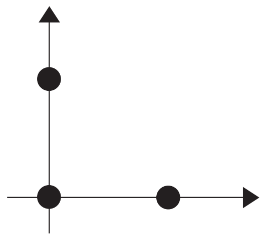
Üçüncü adımda sabitlenenler: (0, 0) ve (1, 0) noktaları

Dördüncü Adım. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu, doğruları doğrulara götürsün ve $(0, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarını sabitlesin. (O zaman x eksenini x eksenine götürmek zorundadır. Dolayısıyla, paralel doğruları paralel doğrulara götürdüğünden yatay doğruları yatay doğrulara götürmek zorundadır.) Şimdi $(0, 1)$ noktasını tekrar $(0, 1)$ noktasına götürmek istiyoruz. Nasıl yapacağız? Bu, biraz daha zor.

$f(0, 1) = (c, d)$ olsun. Şimdi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünü $g(x, y) = (x - d^{-1}cy, d^{-1}y)$ kuralıyla tanımlayalım. g dönüşümü doğruları doğrulara götürür ve $(0, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarını sabitler. Ayrıca (c, d) noktasını $(0, 1)$ noktasına götürür.

> $g(x, y) = (x - cd^{-1}y, d^{-1}y)$ kuralıyla tanımlanan dönüşüm $y = mx + b$ doğrusunu $(1 - mcd^{-1})y = d^{-1}mx + d^{-1}b$ doğrusuna, $x = a$ doğrusunu $x = -cy + a$ doğrusuna götürür.

Demek ki $g \circ f$ dönüşümü doğruları doğrulara götürür ve $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarını sabitler (dolayısıyla x ye y eksenlerini de kendilerine götürür.)



Dördüncü adımda sabitlenenler: (0, 0), (1, 0) ve (0, 1) noktaları

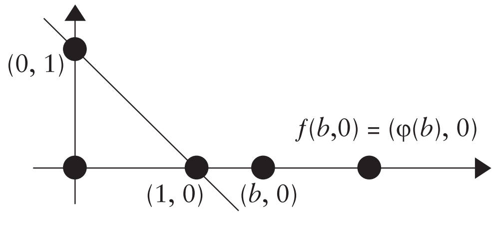
İkinci, Üçüncü ve Dördüncü Adımlar Üzerine Bir Not. İkinci, üçüncü ve dördüncü adımları doğrusal bir dönüşümle tek hamlede yapabilirdik. $f(1, 0) = (a, b)$ ise $f(0, 1) = (c, d)$ ise,

$$g(x, y) = \left(\frac{dx - cy}{ad - bc}, \frac{-bx + ay}{ad - bc}\right)$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. Şimdi $g \circ f$ dönüşümü doğruları doğrulara götürür ve $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarını sabitler. (Tabii bunu yapmadan önce $ad - bc \neq 0$ eşitsizliğini kanıtlamak lazım.)

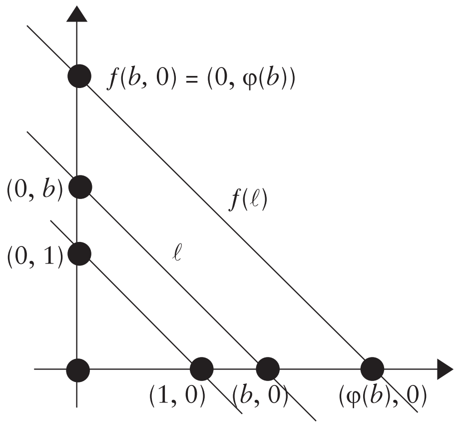
Beşinci Adım. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu, doğruları doğrulara götürsün ve $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarını sabitlesin. O zaman f dönüşümü bu noktalardan geçen üç doğruyu gene kendilerine götürür, yani x eksenini x eksenine, y eksenini y eksenine ve $y = -x + 1$ doğrusunu gene kendine götürmek zorundadır. Ayrıca f'nin paralel doğruları paralel doğrulara götürdüğünü biliyoruz. Dolayısıyla yatay doğruları yatay doğrulara, dikey doğruları dikey doğrulara götürür. Ayrıca eğimi -1 olan doğruları gene eğimi -1 olan doğrulara götürür. Bayağı şey biliyoruz. Bütün bunlardan f'nin her noktayı sabitlediğini kanıtlayacağız.

Şimdi $x \in \mathbb{R}$ olsun. $(x, 0)$ noktası x ekseninde olduğundan, $f(x, 0) = (\varphi(x), 0)$ türünden yazılabilir. Böylece bir $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu elde ediyoruz. f dönüşümü $(0, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarını sabitlediğinden $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi(1) = 1$. Yakın gelecekte, her $x \in \mathbb{R}$ için, $\varphi(x) = x$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bundan böy-



le $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ve $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bu paragrafta tanımlandığı gibi olsunlar.

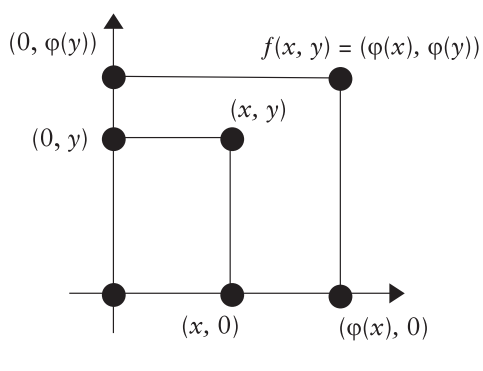
Altıncı Adım. Bu adımda, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(0, x) = (0, \varphi(x))$ eşitliğini kanıtlayacağız. Herhangi bir $b \in \mathbb{R}$ alalım. f dönüşümü y eksenini gene y eksenine götürdüğünden, $f(0, b)$ noktası y ekseni üstündedir, yani birinci koordinatı 0'dır. İkinci koordinatın $\varphi(b)$ olduğunu kanıtlayacağız.



Şimdi $(b, 0)$ ve $(0, b)$ noktalarından geçen ℓ doğrusunu ele alalım ve yukarıdaki şekilden izleyelim. Eğimi –1 olan ℓ doğrusu f tarafından kendisine paralel bir doğruya yollanır. Ama $(b, 0) \in \ell$ olduğundan, $(\varphi(b), 0) = f(b, 0) \in f(\ell)$. Demek ki $f(0, b) = (0, \varphi(b))$.

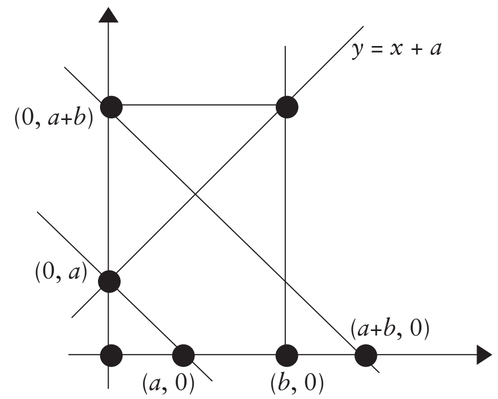
Yedinci Adım. Şimdi şunu iddia ediyorum: Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ eşitliği doğrudur.

Herhangi bir (x, y) noktası alalım. $(x, 0)$'dan geçen dikey doğru $f(x, 0) = (\varphi(x), 0)$'dan geçen dikey doğruya gitmek zorunda. Aynı zamanda $(0, y)$'den geçen yatay doğru $f(0, y) = (0, \varphi(y))$'den geçen yatay doğruya gitmek zorunda. Dolayısıyla (x, y) noktası $(\varphi(x), \varphi(y))$ noktasına gitmek zorunda.



Bir Sonuç. Yukardaki adıma göre, $(1, 1)$ noktası f altında $f(1, 1) = (\varphi(1), \varphi(1)) = (1, 1)$ noktasına, yani kendine gitmek zorunda. Dolayısıyla $(0, 0)$ ve $(1, 1)$ noktalarından geçen doğru da kendine gider. Demek ki eğimi 1 olan bir doğru gene eğimi 1 olan bir doğruya gider. Eğimi –1 olan bir doğrunun gene eğimi –1 olan bir doğruya gittiğini zaten biliyoruz.

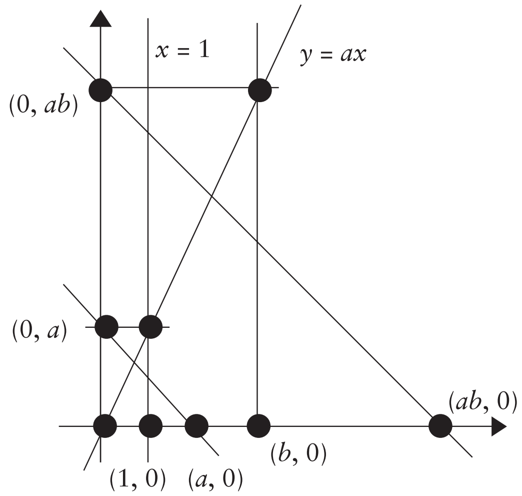
Sekizinci Adım. Bu paragrafta, φ'nin toplamaya saygı duyduğunu, yani her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ eşitliğini kanıtlayacağız.



Yukarıdaki şekilden de görüleceği üzere, $(a, 0)$ ve $(b, 0)$ noktası verilmişse, $(a + b, 0)$ noktasını dikey, yatay ve eğimi 1 ve –1 olan doğruların kesişimlerinden elde edebiliriz. Şimdi, $(a + b, 0)$ noktasını bulmak için kullandığımız bu yedi doğruya ve yedi noktaya f'yi uygulayalım. Aynen bu şekle benzeyen bir durum elde ederiz. x ve y eksenler ve $(0, 0)$ noktası yerlerinden kımıldamaz. Böylece $f(a, 0) = (\varphi(a), 0)$ ve $f(b, 0) = (\varphi(b), 0)$ noktalarından hareket ederek ve aynı yöntemle $(\varphi(a) + \varphi(b), 0)$ noktasını elde ederiz. Öte yandan bu nokta aynı zamanda $f(a + b, 0)$, yani $(\varphi(a + b), 0)$ noktasıdır da. Demek ki $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Dokuzuncu Adım. Bu paragrafta, φ'nin çarpmaya saygı duyduğunu, yani her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ eşitliğini kanıtlayacağız.

Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere, $(a, 0)$ ve $(b, 0)$ noktası verilmişse, $(ab, 0)$ noktasını dikey, yatay ve eğimi 1 ve –1 olan doğruların kesişimlerinden ve bu kesişimlerden geçen doğrularla elde edebiliriz. Şimdi, $(ab, 0)$ noktasını bulmak için kullandığımız bu dokuz doğruya ve dokuz noktaya f'yi uygulayalım. Aynen bu şekle benzeyen bir durum elde ederiz. Üç doğru (x ve y eksenleri ve $x = 1$ doğrusu) ve iki nokta ($(0, 0)$ ve $(1, 0)$ noktaları) yerlerinden kımıldamaz. Böylece



$f(a, 0) = (\varphi(a), 0)$ ve $f(b, 0) = (\varphi(b), 0)$ noktalarından hareket ederek aynı yöntemle $(\varphi(a)\varphi(b), 0)$ noktasını elde ederiz. Öte yandan bu nokta aynı zamanda $f(ab, 0)$, yani $(\varphi(ab), 0)$ noktasıdır da. Demek ki $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Onuncu Adım. Adım adım yolun sonuna geldik. Şimdi önümüzde, her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ ve } \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

eşitliklerini sağlayan bir fonksiyon var. Cahit Arf Günleri II, ikinci gün, soru 5, sayfa 24'te böyle bir f'nin birim fonksiyon olduğunu görmüştük. Demek ki dördüncü adımda bulduğumuz dönüşüm birim fonksiyonuymuş.

Özetleyin. Doğruları doğrulara gönderen birebir bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuyla yola koyulduk.

Birinci adımda, bir t ötelemesi için, $t \circ f$ dönüşümünün doğruları doğruları götürdüğünü, ayrıca $(0, 0)$ noktasının yerini değiştirmediğini gördük.

İkinci adımda, bir ρ döndürüsü için, $\rho \circ t \circ f$ dönüşümünün doğruları doğruları götürdüğünü, $(0, 0)$ noktasının yerini değiştirmediğini, ayrıca x eksenini x eksenine götürdüğünü gördük.

Üçüncü adımda, belli bir a için,

$$r(x, y) = (a^{-1}x, y)$$

kuralıyla tanımlanan bir r fonksiyonu için,

$$r \circ \rho \circ t \circ f$$

dönüşümünün doğruları doğruları götürdüğünü, $(0, 0)$ noktasının yerini değiştirmediğini, x eksenini x eksenine götürdüğünü ve ayrıca $(1,0)$ noktasını $(1, 0)$ noktasına götürdüğünü gördük.

Dördüncü adımda, belli bir $u, v \in \mathbb{R}$ için ve $g(x, y) = (x - uy, vy)$ kuralıyla tanımlanan g fonksiyonu için, $g \circ r \circ \rho \circ t \circ f$ dönüşümünün doğruları doğruları götürdüğünü, $(0, 0)$ noktasının yerini değiştirmediğini, x eksenini x eksenine götürdüğünü, $(1,0)$ noktasını $(1, 0)$ noktasına götürdüğünü ve ayrıca $(0, 1)$ noktasını $(0, 1)$ noktasına götürdüğünü gördük.

Beşinci ve sonraki adımlarda, yukardaki özelliğe sahip bir fonksiyonun birim fonksiyon olması gerektiğini gördük, yani $g \circ r \circ \rho \circ t \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Bundan da kolaylıkla şu sonuç çıkar:

Teorem. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *doğruları doğrulara götüren birebir bir fonksiyon olsun. O zaman, öyle bir t ötelemesi, öyle bir ρ döndürüsü ve öyle bir $g(x, y) = (ax + by, cy)$ fonksiyonu vardır ki, $f = t \circ \rho \circ g$ eşitliği sağlanır*[3]. ♥

3 Uzmana Not: Bu teoremin kanıtından şunlar çıkar: 1) K bir cisim olsun. K^2'nin doğruları doğrulara götüren eşlemeleri ($K^2 \rtimes GL_2(K)) \rtimes Aut(K)$ grubuna izomorftur. 2) Eğer $B_2(\mathbb{R})$ üst-üçgen matrislerse (yani standard Borel altgrubu), $GL_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})B_2(\mathbb{R})$. (Ama bu iki altgrubun hiçbiri normal değil, ayrıca ikisi de çözülebilir.)

Toplamayı Çarpmaya Dönüştüren Fonksiyonlar

$\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonlarını bulun. Böyle bir fonksiyonun eşleşme olamayacağını gösterin.

Çarpmayı Toplamaya Dönüştüren Fonksiyonlar

$\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve Çarpmayı Toplamaya Dönüştüren Fonksiyonları bulun. Örten olanları var mı? Birebir olanları var mı?