



Kapak Konusu: Özyapı Dönüşümleri

Özyapı Dönüşümlerine Genel Bakış

Matematiksel bir yapının özyapı dönüşümlerini tanımlamak hiç de kolay değildir. Ama biraz deneyimle, her matematikçi, bir yapının özyapı dönüşümlerinin ne olması gerektiğini bilir.

Özyapı dönüşümü her şeyden önce bir eşleşme olmalıdır ve kümenin umurumuzda olan özelliklerine saygı duymalıdır. Ve öyle tanımlanmalıdır ki,

1) Id, yani birim fonksiyon bir özyapı dönüşümü olmalıdır,

2) Eğer f ve g özyapı dönüşümleriyse, $f \circ g$ de bir özyapı dönüşümü olmalıdır.

3) Eğer f bir özyapı dönüşümüyse, f^{-1} de bir özyapı dönüşümü olmalıdır.

Ayrıca şu özellik de olmalıdır:

4) Eğer f , M yapısının bir özyapı dönüşümüyse, M için doğru olan bir tümcede adı geçen elemanlar yerine o elemanların imgelerini yazarsak gene M 'de doğru bir tümcde elde ederiz. Burada ki "tümcde"nin ne demek olduğunu tam matematiksel olarak açıklamayacağız, ama tümcde M 'nin umurumuzda olan özellikleriyle (toplamayla, çarpmayla, sıralamayla vs) ilgili olmalı.

Kuşbakışı. Matematiksel bir yapının özyapı dönüşümleri kümesi o yapının özünü bir biçimde içinde barındırır. Bir yapının ne ka-

dar çok özyapı dönüşümü varsa, o yapı o kadar esnek ve elemanları birbirinden o kadar bağımsızdır. Bir yapının ne kadar az özyapı dönüşümü varsa, o yapı o kadar katıdır, kemikleşmiştir, belirlenmiştir.

Genel olarak, çok çok özyapı dönüşümü olan yapılarla çok çok az özyapı dönüşümü olan yapıların incelenmesi görece daha kolaydır.

Sorular:

1. $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olsun. Ve M 'de şu "toplama" işlemini tanımlayalım:

$$(x, y) + (z, t) = (x + t, y + t).$$

Bu yapının özyapı dönüşümlerini bulun, yani $\text{Aut}(M, +)$ kümesini bulun.

2. $M = \mathbb{N}$ olsun. R ikili ilişkisi şöyle tanımlanmış olsun:

$$xRy \Leftrightarrow x, y \text{ 'yi bölüyorsa}$$

(\mathbb{N}, R) yapısının özyapı dönüşümlerini bulun.

3. $M = \mathbb{Z}$ olsun. Her $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ için 2^n , x 'i bölüyorsa, ama 2^{n+1} bölmüyorsa, $v(x) = n$ yazalım. Eğer $x \neq y$ ise, $d(x, y) = 2^{-v(x-y)}$ olsun. Ayrıca $d(x, x) = 0$ olarak tanımlanmış olsun.

(\mathbb{Z}, d) 'nin bir metrik uzay olduğunu kanıtlayın.

Bu metrik uzayın izomet-rilerini bulun. ♥

