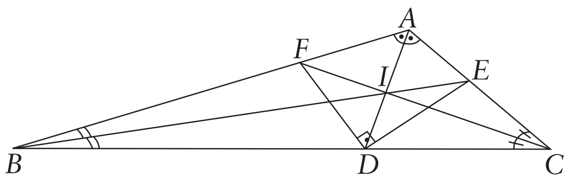
Hüseyin Demir Hocamızın On Yıllık Sorusu

Mustafa Yağcı / *yagcimustafa@yahoo.com*

Matematik Dünyası'nın Aralık 1992 sayısında (Cilt 2, sayı 4, sayfa 27) şimdi artık aramızda olmayan sevgili Hüseyin Demir hocamız aşağıdaki soruyu sormuştu.

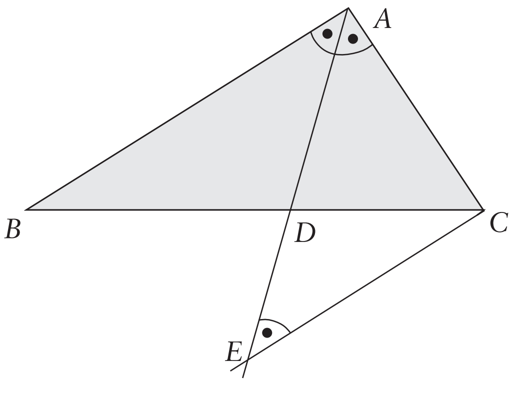
İçaçıortayları AD, BE, CF olan yukarıdaki ABC üçgeninde FDE açısı 90 *dereceyse BAC açısı kaç derecedir?*



Benim gibi birçok meslektaşımı da uğraştırdığını düşündüğüm bu güzel probleme bulduğum çözümü sunuyorum. Önce çözümde kullanacağım bazı teoremleri kanıtlayacağım.

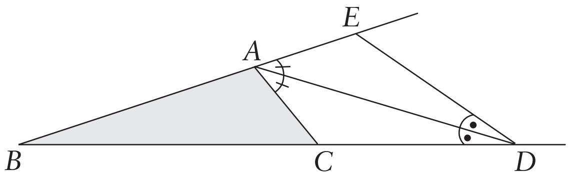
Kullanacağımız Menelaus'un ve Ceva'nın teoremlerinin kanıtları bir önceki yazıda bulunuyor. Diğerlerini sunuyoruz.

1. İçaçıortay Teoremi. *Bir ABC üçgeninde BAC açısının açıortayı BC kenarını D noktasında kessin. O zaman BD/CD = BA/AC.*



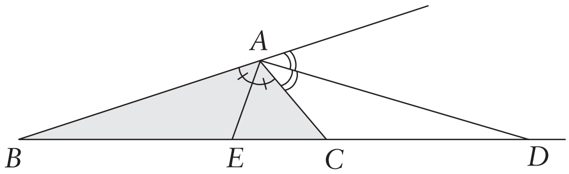
Kanıt: *AB* doğrusuna koşut ve *C*'den geçen doğru *AD*'yi *E*'de kessin. Bir yandan *ADB* ile *EDC* üçgenleri benzer olduğundan *BD/CD* = *BA/CE*. Öte yandan *ACE* üçgeni ikizkenar olduğundan *CE* = *AC*. Dolayısıyla *BD/CD* = *BA/AC* .

2. Dışaçıortay Teoremi. *Bir ABC üçgeninde BAC açısının dışaçıortayı, BC doğrusunu D noktasında kessin. O zaman, DC/DB* = *AC/AB*.



Kanıt: *BA* ışını üzerinde, *DA* doğrusu *BDE* açısının açıortayı olacak şekilde bir *E* noktası alalım. *EDB* üçgeninde *DA* içaçıortay olduğundan *DE/DB* = *EA/AB* olması gerektiğini biraz önce kanıtlamıştık. *ACD* ve *AED* üçgenlerinin eş olmalarından dolayı, *EA* = *AC* ve *DE* = *DC*. O halde *DC/DB* = *AC/AB*.

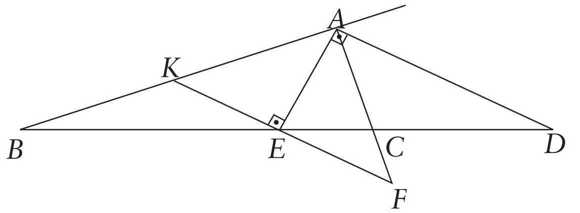
3. İçaçıortay ve dışaçıortay teoremlerinin bir sonucu. *Bir ABC üçgeninde A açısının iç ve dış açıortayları BC doğrusunu sırasıyla E ve D noktalarında kessin. O zaman DC/DB* = *EC/EB*.



Kanıt: Dışaçıortay Teoremi'ne göre *DC/DB* = *AC/AB* ve İçaçıortay Teoremi'ne göre *EC/EB* = *AC/AB*. O halde *DC/DB* = *EC/EB*.

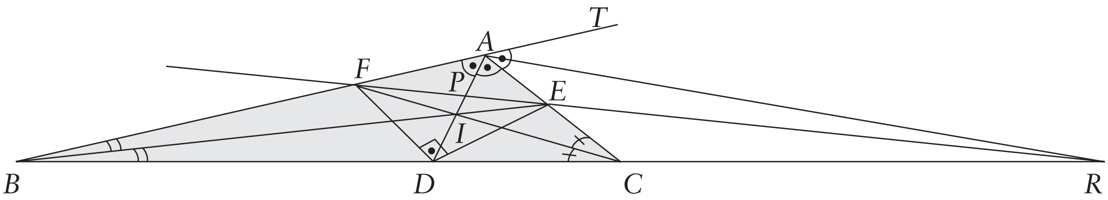
4. Şimdi bu teoremin tersini yani üstteki şekle göre "*DC/DB* = *EC/EB ve m*(*DAE*) = 90 *ise AD dışaçıortay ve AE içaçıortaydır*" savını kanıtlayalım, çünkü çözümde onu da kullanıyoruz.

AD doğrusuna koşut ve *E* noktasından geçen doğru *AC*'yi *F*'de, *AB*'yi *K*'da kessin. *KEB* ile *ADB* üçgenlerinin benzer olmasından dolayı *AD/DB* = *KE/EB* dir. Aynı zamanda *DC/DB* = *EC/EB* verilmiş. İkisi ortak düşünülürse *AD/KE* = *DC/EC* çıkar. *ACD* ve *FCE* üçgenlerinin ben-



zerliğinden $AD/FE = DC/EC$ dir. O halde $KE = FE$ dir. *KAF* üçgeninde *AE* yüksekliği aynı zamanda kenarortay çıktığından *KAF* ikizkenar üçgen olup, *AE* aynı zamanda içaçıortaydır. Dolayısıyla da *AD* dışaçıortay olur.

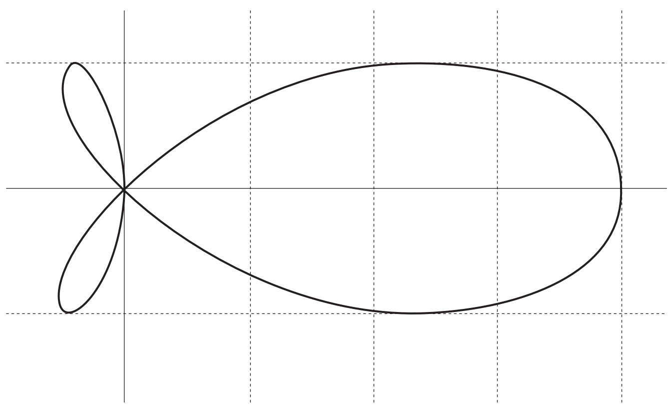
Şimdi artık on yıl öncesinin sorusunu çözebiliriz:



F ve *E* noktalarından geçen doğru, *BC* doğrusunu *R* noktasında kessin. Ayrıca *FE* doğrusunun *AD* içaçıortayını kestiği noktaya da *P* diyelim. Şekildeki uzunlukları yukarıdaki gibi harflendirelim. *BAC* üçgenine ve bu üçgenin kenarlarını kesen *REF* doğrusuna Menelaus Teoremi'ni uygularsak $CR \times BF \times AE = (CR+DC+BD) \times FA \times EC$ eşitliğini ve *BAC* üçgenine Ceva teoremini uygularsak $DC \times BF \times AE = BD \times FA \times EC$ eşitliğini elde ederiz. Bu ikisinden $CR/(CR+DC+BD) = DC/BD$ eşitliği çıkar. Bu son eşitlik son teoremde bulduğumuz sonucu anımsatıyor: O teoreme göre *BAC* üçgeninde *AD* içaçıortay doğrusu ise (ki öyle) *AR* de dışaçıortay doğrusudur. Elbette *AR* doğrusu *FAE* üçgeni için de dışaçıortaydır. Buradan da, gene son teorem gereği, $ER/(ER+PE+FP) = PE/FP$ bulunur. Bu ve $m(FDE) = 90$ eşitliği bize *DPR* üçgeninde *DF*'nin dışaçıortay, *DE*'nin de içaçıortay olduğunu söyler.

Bir üçgende iki dışaçıortayın kesiştiği yerin, üçgenin bir dışteğet çemberinin merkezi olduğunu ve kullanılmayan üçüncü açının da içaçıortayının bu merkezden geçtiğini biliyoruz. O halde *BAD* üçgeninde *BE* içaçıortay, *DE* dışaçıortay olduğundan, kesiştikleri *E* noktası *ABD* üçgeninin bir dışteğet çember merkezidir. *AE* de dışaçıortay olmak zorundadır. Bundan da $m(BAD) = m(DAC) = m(CAT) = 60$ çıkar. Dolayısıyla $m(BAC) = 120$'dir. ♥

! Vay Canına



$r = \cos(t) + \cos(3t)$