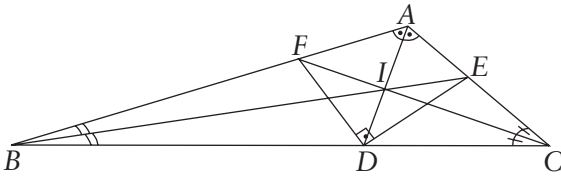


Hüseyin Demir Hocamızın On Yıllık Sorusu

Mustafa Yağcı / yagcimustafa@yahoo.com

Matematik Dünyası'nın Aralık 1992 sayısında (Cilt 2, sayı 4, sayfa 27) şimdi artık aramızda olmayan sevgili Hüseyin Demir hocamız aşağıdaki soruyu sormuştu.

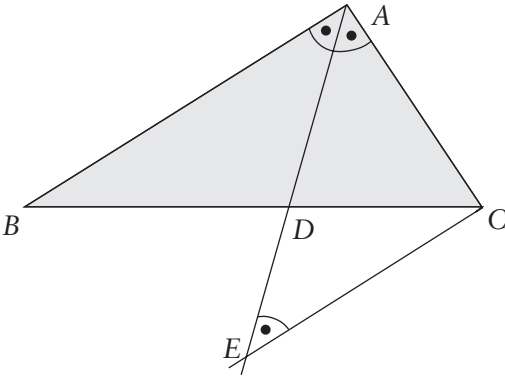
İçaçıortayları AD, BE, CF olan yukarıdaki ABC üçgeninde FDE açısı 90 dereceyse BAC açısı kaç derecedir?



Benim gibi birçok meslektaşımı da uğraştırdığını düşündüğüm bu güzel probleme bulduğum çözümü sunuyorum. Önce çözümde kullanacağım bazı teoremleri kanıtlayacağım.

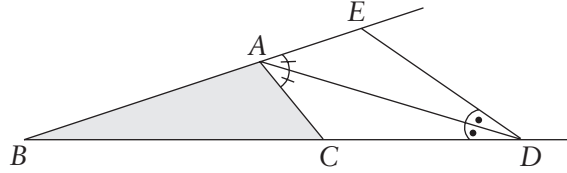
Kullanacağımız Menelaus'un ve Ceva'nın teoremlerinin kanıtları bir önceki yazıda bulunuyor. Diğerlerini sunuyoruz.

1. İaçıortay Teoremi. *Bir ABC üçgeninde BAC açısının açıortayı BC kenarını D noktasında kessin. O zaman $BD/CD = BA/AC$.*



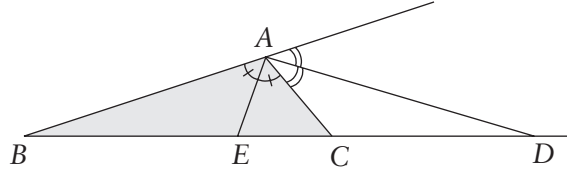
Kanıt: AB doğrusuna koştut ve C'den geçen doğru AD'yi E'de kessin. Bir yandan ADB ile EDC üçgenleri benzer olduğundan $BD/CD = BA/CE$. Öte yandan ACE üçgeni ikizkenar olduğundan $CE = AC$. Dolayısıyla $BD/CD = BA/AC$.

2. Dışaçıortay Teoremi. *Bir ABC üçgeninde BAC açısının dışaçıortayı, BC doğrusunu D noktasında kessin. O zaman, $DC/DB = AC/AB$.*



Kanıt: BA ışını üzerinde, DA doğrusu BDE açısının açıortayı olacak şekilde bir E noktası alalım. EDB üçgeninde DA içaçıortay olduğundan $DE/DB = EA/AB$ olması gerektiğini biraz önce kanıtlamıştık. ACD ve AED üçgenlerinin eş olmalarından dolayı, $EA = AC$ ve $DE = DC$. O halde $DC/DB = AC/AB$.

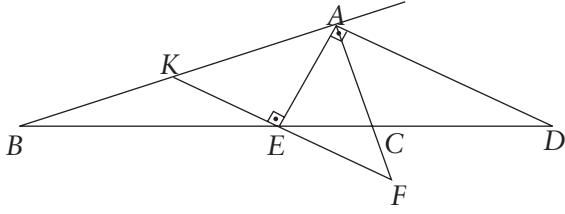
3. İaçıortay ve dışaçıortay teoremlerinin bir sonucu. *Bir ABC üçgeninde A açısının iç ve dış açıortayları BC doğrusunu sırasıyla E ve D noktalarında kessin. O zaman $DC/DB = EC/EB$.*



Kanıt: Dışaçıortay Teoremi'ne göre $DC/DB = AC/AB$ ve İaçıortay Teoremi'ne göre $EC/EB = AC/AB$. O halde $DC/DB = EC/EB$.

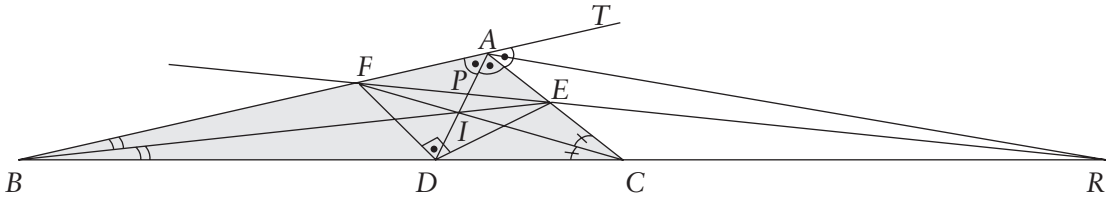
4. Şimdi bu teoremin tersini yani üstteki şekle göre " $DC/DB = EC/EB$ ve $m(\angle DAE) = 90$ ise AD dışaçıortay ve AE içaçıortaydır" savını kanıtlayalım, çünkü çözümde onu da kullanıyoruz.

AD doğrusuna koştut ve E noktasından geçen doğru AC'yi F'de, AB'yi K'da kessin. KEB ile ADB üçgenlerinin benzer olmasından dolayı $AD/DB = KE/EB$ dir. Aynı zamanda $DC/DB = EC/EB$ verilmiş. İkisi ortak düşünülürse $AD/KE = DC/EC$ çıkar. ACD ve FCE üçgenlerinin ben-



zerliğinden $AD/FE = DC/EC$ dir. O halde $KE = FE$ dir. KAF üçgeninde AE yüksekliği aynı zamanda kenarortay çıktığından KAF ikizkenar üçgen olup, AE aynı zamanda içaçıortaydır. Dolayısıyla da AD dışaçıortay olur.

Şimdi artık on yıl öncesinin sorusunu çözebiliriz:



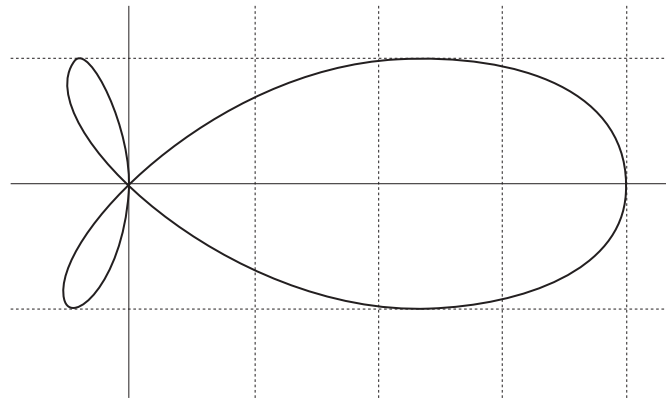
F ve E noktalarından geçen doğru, BC doğrusunu R noktasında kessin. Ayrıca FE doğrusunun AD içaçıortayını kestiği noktaya da P diyelim. Şekildeki uzunlukları yukarıdaki gibi harflendirelim. BAC üçgenine ve bu üçgenin kenarlarını kesen REF doğrusuna Menelaus Teoremi'ni uygularsak $CR \times BF \times AE = (CR + DC + BD) \times FA \times EC$ eşitli-

ğini ve BAC üçgenine Ceva teoremini uygularsak $DC \times BF \times AE = BD \times FA \times EC$ eşitliğini elde ederiz. Bu ikisinden $CR/(CR + DC + BD) = DC/BD$ eşitliği çıkar. Bu son eşitlik son teoreme bulduğumuz sonucu anımsatıyor: O teoreme göre BAC üçgeninde AD içaçıortay doğrusu ise (ki öyle) AR de dışaçıortay doğrusudur. Elbette AR doğrusu FAE üçgeni için de dışaçıortaydır. Buradan da, gene son teorem gereği, $ER/(ER + PE + FP) = PE/FP$ bulunur. Bu ve $m(FDE) = 90$ eşitliği bize DPR üçgeninde DF 'nin dışaçıortay, DE 'nin de içaçıortay olduğunu söyler.

Bir üçgende iki dışaçıortayın kesiştiği yerin, üçgenin bir dışteğet çemberinin merkezi olduğunu ve

kullanılmayan üçüncü açının da içaçıortayının bu merkezden geçtiğini biliyoruz. O halde BAD üçgeninde BE içaçıortay, DE dışaçıortay olduğundan, kesiştikleri E noktası ABD üçgeninin bir dışteğet çember merkezidir. AE de dışaçıortay olmak zorundadır. Bundan da $m(BAD) = m(DAC) = m(CAT) = 60$ çıkar. Dolayısıyla $m(BAC) = 120$ 'dir. ♥

! Vay Canına



$$r = \cos(t) + \cos(3t)$$