Topoloji Köşesi

Burak Özbağcı*
bozbagci@ku.edu.tr

Poincaré Sanısı Çözüldü mü?

Geçen sayıda Clay Matematik Enstitüsü'nün çözene bir milyon dolar ödül vereceğini duyurduğu yedi milenyum sorusundan biri olan Poincaré sanısını anlatmıştım. Poincaré sanısı her basit bağlantılı (simply connected) üç-katlının (üç boyutlu manifold) üç boyutlu küreye topolojik olarak eşdeğer olup olmadığıdır. Bu soru her boyutta çözülmüş, yalnızca 3 için günümüze kadar yanıtlanamamıştır. Birkaç aydır Rus matematikçi Grigori Perelman'ın bu soruyu çözdüğüne dair söylentiler matematikçiler arasında dolaşmakta. Perelman, Nisan'da MIT'de büyük bir kalabalık önünde yaptıklarını anlatmaya başladı ve 15 Nisan tarihli New York Times'ta Perelman'ın olası çözümünün matematikçiler tarafından çok ciddiye alındığına dair bir haber çıktı. Perelman'ın bu büyük ödüle sahip olabilmesi için yaptığı çalışmaların hakemli bir dergide yayımlanmasının üzerinden iki yıl geçmesi gerekiyor.

Perelman, Poincaré sanısından çok daha genel olan Thurston'ın Geometrileşme Sanısı'nı doğruladığını iddia etmektedir. Thurston bu sanıyı bazı koşullar altında doğrulayarak 1982'de matematikçilere verilen en büyük ödül olan Fields Madalyası'nı almıştı. Geometrileşme Sanısı'ndan Poincaré Sanısı kolaylıkla çıkar. Geometrileşme Sanısı her kapalı üç-katlının belli iki boyutlu küreler ve toruslar boyunca kesilip parçalara ayrıldığında ortaya çıkan daha "küçük" üç-katlıların Thurston'ın belirlediği sekiz geometrik yapıdan mutlaka birine sahip olduğudur. Bu sekiz geometri şunlardır: 1) Öklid geometrisi 2) Hiperbolik geometri 3) Küresel geometri 4) $S \times \mathbb{R}$ geometrisi 5) $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ geometrisi 6) $SL_2(\mathbb{R})$ geometrisi 7) Nil geometrisi 8) Sol geometrisi.

Üç-katlıların geometrik sınıflandırılmasını ikikatlıların sınıflandırılmasının genelleştirilmesi olarak düşünebiliriz. Topolojik olarak kapalı yüzeyler delik sayısına göre belirlenir: küre (sıfır delikli), torus (bir-delikli), iki-delikli vs. Kürenin üzerinde küresel geometri, bir-delikli üzerinde Öklid geometrisi ve diğer yüzeyler üzerinde hiperbolik geometri vardır. Yani yüzeylerin nerdeyse tümünde hiperbolik bir geometrik yapı bulunmaktadır. Üç-katlılar için de bu doğrudur: Genel bir üç-katlı üzerinde hiperbolik yapı vardır. Çokkatlılar üzerinde bir geometri, kabaca, noktalar arasında bir "uzaklık" kavramının belirlenmesidir. Geometriyi topolojiden ayıran temel özellik bu uzaklıktır. Bir çokkatlıyı yırtmadan eğip bükerek uzaklıkları değiştirebiliriz ama topolojik olarak bir değişiklik yapmış olmayız.

Bir geometrinin en belirgin özelliği çokkatlıya sağladığı eğrilik miktarıdır. Değişik yöntemlerle ölçülebilen bu eğrilik miktarı türevlenebilir geometrinin temel yapı taşlarını oluşturur.

Geometrileşme Sanısı'nı kanıtlayan çalışması doğru olsa bile, Perelman, Clay Enstitüsü'nün ödülünü büyük olasılıkla Amerikalı Richard Hamilton'la paylaşmak zorunda kalacaktır. Hamilton, Geometrileşme Sanısı'nı çözmek için yıllardır uğraşmakta ve sürekli yeni makaleler yayımlamaktaydı. Aslında Perelman'ın "Hamilton'un programı" denen, Geometrileşme Sanısı'nı doğrulamak üzere ortaya atılmış uzun ve zorlu bir matematiksel planı başarıyla tamamlamış gözükmektedir. Hamilton'un kullandığı esas yöntemin adı Ricci akmalarıdır (Ricci flows). Bu yöntem kabaca uzaklığın çokkatlı üzerinde "akmasına" izin verilmesine dayanır ve esas teknik zorluk bir kısmi türev denkleminin çözümlerinin varlığıyla ilgilidir. İlk bakışta tümüyle topolojik olan Poincaré Sanısı'nın doğruluğunu bir kısmi türev denkleminin çözüm kümesine indirgemek çok şaşırtıcıdır. İngiliz Simon Donaldson da başka bir topolojik soruyu bu yöntemle çözerek 1986'da Fields madalyası almıştı. ♥

* Koç Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.