0-1 Dizileri ve Fibonacci Sayıları

Sayar Bayar

Saymak sanıldığı kadar kolay olmadığı gibi, saymak sayesinde çok ilginç ve derin eşitlikler de elde edilebilir. Genel yöntem şudur: Aynı kümenin elemanları iki değişik biçimde sayılırsa ve her iki sayma yöntemi iki değişik formül verirse, o zaman bu iki değişik formül birbirine eşit demektir, bu da çoğu zaman ilginç bir eşitlik verir.

Bu yöntemle, son derece ilginç birkaç eşitlik geçen sayımızda Hayri Ardal'ın **Fonksiyonları Saymak** adlı yazısında elde edilmişti.

Bugün bu yöntemle Fibonacci sayıları üzerine ilginç bir eşitlik bulacağız.

Soru: 0 ve 1'lerden oluşan ve içinde peşpeşe iki tane 0 olmayan n uzunluğunda kaç dizi vardır?

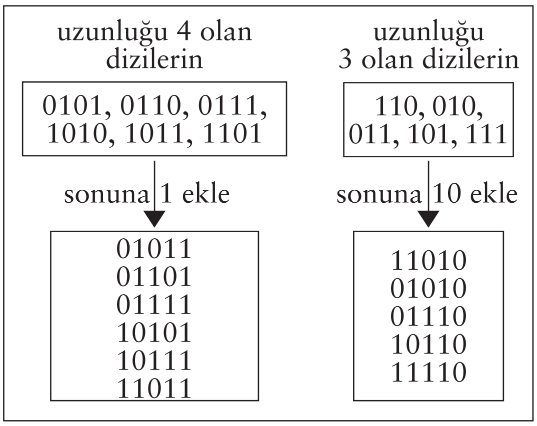
Bu sayıya $f(n)$ diyelim ve ilk altı örneğe bakalım:

n	diziler	$f(n)$
0	boşdizi[1]	1
1	0, 1	2
2	01, 10, 11	3
3	010, 011, 101, 110, 111	5
4	0101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1101, 1110, 1111	8
5	01010, 01011, 01101, 01110, 01111, 10101, 10110, 10111, 11010, 11011, 11101, 11110, 11111	13

İlk altı $f(n)$ sayısı Fibonacci sayılarına eşit: 1, 2, 3, 5, 8, 13... Bir rastlantı mı acaba?

Birinci Sayma. Koşullarımızı sağlayan *b*u dizilerin sonunda ya 1 vardır ya da 10, başka bir şey olamaz.

Eğer dizinin sonunda 1 varsa, bu en sondaki



1'i diziden atarsak, geriye gene koşullarımızı sağlayan $n-1$ uzunluğunda bir dizi kalır, ki bunlardan $f(n-1)$ tane vardır.

Eğer dizinin sonunda 10 varsa, bu 10'ı diziden atarsak, geriye gene koşullarımızı sağlayan $n-2$ uzunluğunda bir dizi kalır, ki bunlardan $f(n-2)$ tane var.

Demek ki, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, yani $f(n)$'ler Fibonacci sayılarının genel eşitliğini sağlıyorlar. Ayrıca ilk iki terim, $f(0)$ ve $f(1)$, yani 1 ve 2, Fibonacci sayıları olduklarından, $f(n)$'lerden oluşan dizi Fibonacci dizisidir.

Bir önceki yazının yazılımıyla,

$$f(n) = f_{n+2}.$$

İkinci Sayma. Şimdi aynı dizileri başka türlü sayacağız.

Dizilerimizin şu özelliği var: Dizideki her 0'dan sonra bir 1 gelmeli. Yani aslında dizilerimiz 01 ve 1'lerden oluşan dizilerdir... Tam öyle değil, aşağı yukarı... En sondaki olası 0 mızıkçılık yapıyor.

Eğer dizi **0'la bitmiyorsa**, içinde 00 barındırmayan diziler gerçekten de 01 ve 1'lerden oluşan dizilerdir, ve bu türden her dizi 01 ve 1'lerle **tek bir biçimde** yazılır.

Eğer dizi 0'la bitiyorsa, o son 0'ı atarsak, o zaman geriye 01 ve 1'lerden oluşan bir dizi kalır.

Demek ki, $f(n)$ = (01 ve 1'lerden oluşan n uzunluğundaki dizilerin sayısı) + (01 ve 1'lerden oluşan $n-1$ uzunluğundaki dizilerin sayısı) dır.

01 ve 1'lerden oluşan n uzunluğundaki dizileri sayalım. Diyelim a tane 01 var ve b tane 1 var.

1 Sıfır uzunluğunda tek bir dizi vardır, boşdizi. Boşdizinin hiç terimi yoktur. Boş dizi kimileyin ⟨⟩ olarak yazılır.

Dolayısıyla $2a + b = n$ olmalı. Bunu aklımızda tutalım. a tane 01 ve b tane 1'le n uzunluğunda kaç dizi yazabiliriz? Toplam $a + b$ tane simge (ya 01 ya da 1) koyacağız ve bunlardan a tanesi 01 olacak (geri kalanlar 1 olacak). Demek ki,

$$\binom{a+b}{a}$$

tane bu türden dizi yazabiliriz, yani 01 ve 1'lerden oluşan n uzunluğundaki dizilerin sayısı,

$$\sum\nolimits_{2a+b=n}\binom{a+b}{a}$$

dır. Bu formülü daha güzel bir biçimde yazalım:

$$\sum\nolimits_{2a+b=n}\binom{a+b}{a} = \sum\nolimits_{2a+b=n}\binom{n-a}{a} = \sum\nolimits_{a=0}^{n}\binom{n-a}{a}$$

(En sağdaki terimde, eğer $n-a<a$ ise, $\binom{n-a}{a}=0$ eşitliğini varsayıyoruz.)

Bunun gibi, 01 ve 1'lerden oluşan $n-1$ uzunluğundaki dizilerin sayısı

$$\sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\binom{n-1-a}{a}$$

dır. Demek ki $f(n)$ sayısı aynı zamanda

$$\sum\nolimits_{a=0}^{n}\binom{n-a}{a} + \sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\binom{n-1-a}{a}$$

sayısına eşit. Bu son ifadeyi çok daha yalın bir biçimde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{a=0}^{n}\binom{n-a}{a} + \sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\binom{n-1-a}{a}\\
&= 1 + \sum\nolimits_{a=1}^{n}\binom{n-a}{a} + \sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\binom{n-1-a}{a}\\
&= 1 + \sum\nolimits_{b=0}^{n-1}\binom{n-1-b}{b+1} + \sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\binom{n-1-a}{a}\\
&= 1 + \sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\binom{n-1-a}{a+1} + \sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\binom{n-1-a}{a}\\
&= 1 + \sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\left(\binom{n-1-a}{a+1} + \binom{n-1-a}{a}\right)\\
&= 1 + \sum\nolimits_{a=0}^{n-1}\binom{n-a}{a+1} = 1 + \sum\nolimits_{b=1}^{n}\binom{n-b+1}{b}\\
&= \sum\nolimits_{b=0}^{n}\binom{n-b+1}{b} = \sum\nolimits_{a+b=n+1}\binom{a}{b}.
\end{aligned}$$

(Açıklama: İkinci eşitlikte ilk toplamda $b = a-1$ aldık, üçüncü eşitlikte $a = b$ aldık, dördüncü eşitlikte ne yaptığımız belli, beşinci eşitlikte her yurttaşın bilmesi gereken bir eşitliği kullandık, altıncı eşitlikte $b = a+1$ aldık, sekizinci eşitlikte $a = n-b+1$ aldık.)

Demek ki,

$$f(n) = \sum\nolimits_{a+b=n+1}\binom{a}{b}$$

Dolayısıyla,

$$f_{n+2} = \sum\nolimits_{a+b=n+1}\binom{a}{b}$$

ya da $n \geq 2$ için,

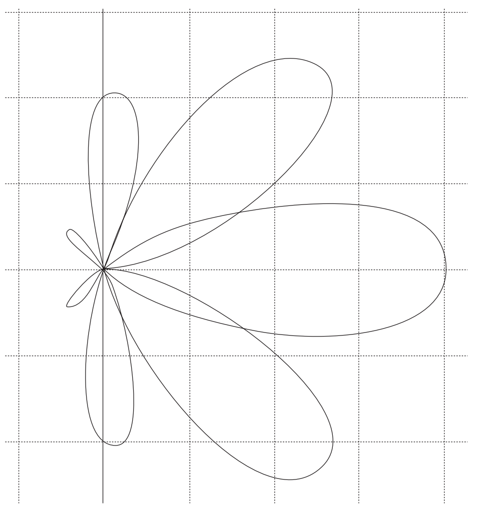
$$f_n = \sum\nolimits_{a+b=n-1}\binom{a}{b}$$

İlginç değil mi?

Bu eşitlik elbette n üzerinden tümevarımla kanıtlanabilir, ancak, tümevarımla bir eşitliği kanıtlamadan önce kanıtlanacak eşitliğin bilinmesi gerekir... Yani tümevarımla kanıt, ancak yanıt bilindiğinde mümkündür. Biz burada, eşitliğin kendisini aynı anda hem bulduk hem de kanıtladık! Bravo bize!

Soru: 0 ve 1'lerden oluşan ve içinde peşpeşe üç tane 0 olmayan n uzunluğunda kaç dizi vardır? ♥

! Vay Canına



$r = \cos(t) + \cos(4t)$