Sonlu ve Sonsuz Sonsuz Toplamlar

Ali Nesin*
anesin@bilgi.edu.tr

Aşağıdaki sonsuz toplam sonlu bir sayı mıdır, yoksa sonsuz mudur?

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + \ldots$$

Sonsuz tane sayıyı topladığımızda sonuç her zaman sonsuz olmayabilir. Örneğin bu örnekte, sonsuz toplam sonlu bir sayıdır. Toplamın ne olduğu biliniyor, birazdan söyleyeceğim.

Sonsuz toplamı bulmadan önce sonlu toplamları bulalım.

$1/1^2$	= 1
$1/1^2 + 1/2^2$	= 1.25
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3$	= 1.361111...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2$	= 1.423611...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2$	= 1.463611...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/6^2$	= 1.491389...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/7^2$	= 1.511797...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/8^2$	= 1.527422...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/9^2$	= 1.539768...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/10^2$	= 1.549768...

Toplamlar gittikçe büyüyorlar. Doğru. Ama bu, sonsuz toplamın sonsuz olacağı anlamına gelmez. Örneğin, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999,... sayıları da durmadan büyürler, ama 1'i hiçbir zaman geçemezler[1].

Bilgisayara sonlu toplamları biraz daha hızlı hesaplatabiliriz:

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/100^2$	= 1,634984...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/200^2$	= 1,639947...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/300^2$	= 1,641606...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/1000^2$	= 1,643935...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/2000^2$	= 1,644432...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/3000^2$	= 1,644595...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/4000^2$	= 1,644714...
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/5000^2$	= 1,644725...

Sonlu toplamlar hâlâ daha durmadan büyüyorlar. Bundan daha doğal bir şey olamaz, çünkü hep pozitif sayıları topluyoruz. Bu sayıların 1,7'ye sanki hiç varamayacaklar gibi bir izlenim elde ettiniz mi? Ettiyseniz haklısınız. Çünkü bu sayılar "sonsuzda" $\pi^2/6$'ya, yani 1,644934067277794... sayısına eşit olurlar. Bir başka deyişle,

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots = \pi^2/6$$

eşitliği geçerlidir. Bunu, büyük matematikçi Euler kanıtlamıştır.

Ne yazık ki yukardaki eşitliğin kanıtını burda veremeyeceğiz, kanıt oldukça ileri düzeyde matematik gerektirir. (Ama bu sonsuz toplamın sonlu bir sayı olduğunu kanıtlamak çok daha kolaydır. Lise düzeyini en fazla bir yıl kadar aşan bu kanıtı da burada vermeyeceğiz.)

Peki $1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \ldots$ sonsuz toplamı nasıl bir sayıdır? $1/n^2 \geq 1/n^3$ olduğundan, bu yeni toplam $\pi^2/6$'dan daha küçük bir sayıdır. Bu sayının hangi sayı olduğu bilinmiyor. Nasıl bir sayı olduğu da bilinmiyor, tek bilinen, bu sayının kesirli bir sayı olmadığı. Bu da, 1990'ların başında kanıtlandı.

Öte yandan $1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \ldots$ sonsuz toplamının kaç olduğu biliniyor. Genel olarak, eğer n çift bir sayıysa, $1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + 1/4^n + \ldots$ sonsuz toplamının π^2'yle kesirli bir sayının çarpımı olduğu biliniyor, ama eğer $n \geq 5$ tek bir sayıysa, bu sonsuz toplam üzerine dişe dokunur bir şey bilindiğini sanmıyorum.

Şu sonsuz toplamı ele alalım şimdi: $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots$ Bu sonsuz toplam sonlu bir sayı mıdır? Yoksa sonsuz mudur?

Yavaş yavaş toplayalım:

$1/1 + 1/2$	= 1,5
$1/1 + 1/2 + 1/3$	= 1,8333...
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$	= 2,08333...
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5$	= 2,28333...
$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/6$	= 2,45
$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/7$	= 2,592857143...
$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/8$	= 2,717857143...
$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/9$	= 2,828968254...
$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/10$	= 2,928968254...

Bu toplamlar sonsuzda ne olurlar? Sonlu bir sayıya mı yakınsarlar, yoksa her sayı bir zaman sonra aşılır mı (yani toplamlar sonsuza mı giderler)?

---

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Bu yazı yazarın **Matematik ve Sonsuz** adlı kitabından uyarlanmıştır.

1 Bu dizi sonsuzda 1 olur. Bir başka deyişle, $9/10 + 9/10^2 + 9/10^3 + \ldots$ sonsuz toplamı, yani 0,9999... sayısı 1'e eşittir.

Örneğin, bu toplamlar bir zaman sonra 100'ü geçer mi? Geçerse ne zaman geçer?

Bilgisayara hesaplatalım bu toplamları. Eğer

$$1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n$$

sayısına S_n diyecek olursak, bulduğumuz sonuçları daha rahatlıkla yazabiliriz. Aşağıdaki tabloda bu sayıları S_{20}'ye kadar bulacaksınız.

S_2	$= 1{,}5$
S_3	$= 1{,}833333\ldots$
S_4	$= 2{,}083333\ldots$
S_5	$= 2{,}283334\ldots$
S_6	$= 2{,}45$
S_7	$= 2{,}592857\ldots$
S_8	$= 2{,}717857\ldots$
S_9	$= 2{,}828969\ldots$
S_{10}	$= 2{,}928968\ldots$
S_{11}	$= 3{,}019877\ldots$
S_{12}	$= 3{,}103211\ldots$
S_{13}	$= 3{,}180134\ldots$
S_{14}	$= 3{,}251562\ldots$
S_{15}	$= 3{,}318229\ldots$
S_{16}	$= 3{,}380729\ldots$
S_{17}	$= 3{,}439553\ldots$
S_{18}	$= 3{,}495108\ldots$
S_{19}	$= 3{,}54774\ \ldots$
S_{20}	$= 3{,}59774\ \ldots$

Bu tablodan daha da ileri gidelim. 4'ü 31inci toplamda aşarız:

$$S_{30} = 3{,}994987\ldots$$

ve

$$S_{31} = 4{,}027246\ldots$$

5 oldukça geç aşılıyor: 83üncü toplamda:

$$S_{82} = 4{,}990021\ldots$$

ve

$$S_{83} = 5{,}002069\ldots$$

6, 227inci toplamda aşılıyor:

$$S_{226} = 5{,}999962\ldots$$

ve

$$S_{227} = 6{,}004367\ldots$$

7'yi aşmak için çok beklemek gerekiyor. 7'yi ancak 616ıncı terimde aşabiliyoruz:

$$S_{615} = 6{,}999652\ldots$$

ve

$$S_{616} = 7{,}001276\ldots$$

8'i aşıp aşmayacağım merak konusu... Onu da aşarız:

$$S_{1673} = 7{,}99989\ldots$$

ve

$$S_{1674} = 8{,}00048\ldots$$

Ya 9? 9'u aşabilir miyiz? Evet:

$$S_{4549} = 8{,}999995\ldots$$

ve

$$S_{4550} = 9{,}000215\ldots$$

10'u, 11'i, 12'yi de aşarız:

$$S_{12366} = 9{,}999969\ldots$$
$$S_{12367} = 10{,}00005\ldots$$
$$S_{33616} = 10{,}99998\ldots$$
$$S_{33618} = 11{,}\ldots$$
$$S_{91328} = 12{,}00001\ldots$$

Her sayıyı bir zaman sonra aşacak mıyız? Örneğin 100'ü aşacak mıyız? Evet aşacağız! $1{,}5 \times 10^{43}$'üncü toplamdan sonra...

Baklayı ağzımdan çıkarayım: Yukardaki dizi sonsuza gider. Yani her sayıyı bir zaman sonra aşarız. Kanıtlayalım.

Aşağıdaki tabloya bakın:

$$1/3 + 1/4 > 1/4 + 1/4 = 1/2$$
$$1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 > 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2$$
$$1/9 + \ldots + 1/16 > 1/16 + \ldots + 1/16 = 1/2$$
$$1/17 + \ldots + 1/32 > 1/32 + \ldots + 1/32 = 1/2.$$

Bu hesaplardan sonra,

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$$

toplamının neden sonsuz olduğu anlaşılıyor:

$1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + \ldots + 1/8) + (1/9 + \ldots + 1/16) + (1/17 + \ldots + 1/32) + \ldots > 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots$

Sağdaki toplam sonsuz olduğundan, daha büyük olan soldaki toplam da sonsuzdur.

Her sayının tersini toplayacağımıza, asal sayıların terslerini toplayalım:

$$1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + \ldots.$$

Asal sayı sayısı oldukça "az" olduğundan, bu toplam sonlu bir sayı olabilir, ama değil, bu toplam da sonsuz. Bu teorem de Euler'in. ♥

! Vay Canına

$$\pi = 4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots)$$

$$\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + \cdots$$

$$\pi/4 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 6}{(2n+1)8^{2n+1}} + \frac{2}{57^{2n+1}} + \frac{1}{239^{2n+1}}\right)$$

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{5\times7} + \frac{1}{9\times11} + \frac{1}{13\times15} + \ldots$$