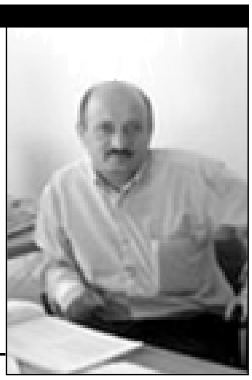
Problemler ve Çözümleri



Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Bu bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 31 Temmuz 2003 tarihine kadar adıma gönderiniz.

Doğru yanıt yollayanlar:

Y273 ve Y274: Mustafa Dönmez ve Yaşar Dönmez.

Y273: Halil Kale Fen Lisesi ve Turgutlu Lisesi.

Y273: Uygar Polat, Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 1.sınıf.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A281. Negatif olmayan a, b ve c tamsayıları $28a + 30b + 31c = 365$ eşitliğini sağlar. $a + b + c = 12$ eşitliğini kanıtlayınız.

A282. M ve K noktalarında kesişen iki çemberin bir ortak teğeti çizilmiştir. A ve B teğetin çemberlere değme noktaları olsun. $m(AMB) + m(AKB) = 180^o$ olduğunu gösteriniz.

A283. $A = \{1, 2, 3\}$ olsun. Her $a \in A$ için $f(f(f(a))) = a$ eşitliğini sağlayan kaç $f : A \to A$ fonksiyonu bulunur?

A284. Ayşe ve Betül aynı anda ve aynı yerden yola çıkıyorlar ve aynı yönde gidiyorlar. Ayşe yürüyor, Betül koşuyor. Betül 400 adım koştuktan sonra geri dönüyor. Bu anda Ayşe adımlarını saymaya başlıyor ve 100 adım attıktan sonra Betül'le karşılaşıyor. Hangisinin adımı daha uzundur?

A285. $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ gerçel sayıları çember boyunca yazılmıştır. Ardarda gelen her üç sayının toplamı 2'den küçük değil, ardarda gelen her beş sayının toplamı da 4'den büyük değil. $a_1 - a_2$ farkının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y281. $n^2 - 5n + 7$ sayısının bir tamsayının karesine eşit olmasını sağlayan tüm n tamsayılarını bulunuz.

Y282. Bir açı kenarı üzerinde bir A noktası alınmıştır. Açının kenarına A noktasında teğet olan ve açının diğer kenarını kesen (kesişim noktaları B ve C olsun) tüm çemberleri alalım. Böyle elde edilmiş tüm ABC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezlerinin aynı doğru üzerinde bulunduğunu kanıtlayınız.

Y283. Doğru üzerinde (yani doğrunun noktalarından oluşan) 100 küme verilmiştir: A_1, A_2, ..., A_{100}. Bu kümelerin herbiri 100 ayrık aralığın birleşimidir. $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{100}$ kümesinin en fazla 9902 ayrık aralığın birleşimi olarak yazılacağını gösteriniz.

Y284. $n \times n$ boyutlu tablodan, her satırdan ve her sütundan birer kez olmak üzere n eleman alındığında bu sayıların toplamı hep aynı sayıya eşitse, bu tabloya "ilginç" tablo denir. Her "ilginç" tablonun, birinde her sütundaki elemanlar birbirine eşit, diğerinde de her satırdaki elemanlar birbirine eşit olmak üzere, iki tablonun toplamı şeklinde gösterilebileceğini gösteriniz.

Y285. a ve b, hiçbiri -1'e eşit olmayan tamsayılar olsun. $x^2 + ax + b + 1 = 0$ denkleminin bir tamsayı çözümü varsa, $a^2 + b^2$ sayısının asal olmadığını gösteriniz.

ESKİ SORULARA ÇÖZÜMLER (Aralık 2002, cilt 11, sayı 5)

A271. *A pozitif tamsayısının rakamları soldan sağa artan sırayla dizilmiştir. $9A$ sayısının basamaklarının toplamını bulunuz.*

Çözüm. A'nın basamakları artan sırayla dizildiğinden $10A$ sayısının basamakları, birler basamağı dışında A sayısının uygun basamaklarından büyüktür, dolayısıyla $9A = 10A - A$ çıkarma işleminde sadece onlar basamağından 1 alınarak birler basamağına 10 eklenecek. $10A$ ve A sayılarının basamakları toplamı aynı olduğundan $9A$ sayısının basamakları toplamı 9 olacak.

A272. *ABCD paralelkenarının köşelerinin kesişim noktası O'dur. A, O ve B noktalarından geçen çember BC'ye teğettir. B, O ve C noktalarından geçen çemberin CD'ye teğet olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm. $m(OCD) = m(OAB) = m(OBC)$ olduğundan (son eşitlik teğetlikten), CD doğrusu, B, O ve C noktalarından geçen çembere teğettir.

A273. *On altı karta 1'den 16'ya kadar tüm tamsayılar yazılmıştır. Bu kartlar, herhangi iki komşu kartın üzerindeki sayıların toplamı tam kare olacak şekilde sıralanabilir mi?*

Çözüm. Evet: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

A274. *A şehrinden B şehrine bir bisikletli ve aynı anda B'den A'ya motorsikletli yola çıktı. Bunlar saat 14,00'da karşılaştılar. Bisikletli iki kat daha hızlı gitseydi saat 13,30'da karşılaşacaklardı. Motorsikletli iki kat fazla hızla gitseydi 13,12'de karşılaşacaklardı. Bisikletli ve motorsikletli saat kaçta yola çıkmışlardı?*

Çözüm. A ile B arasındaki uzaklık s, bisikletlinin hızı a, motorsikletlinin hızı b, ilk karşılaşmaya kadar geçen zaman t olsun.O halde şu denklemleri yazabiliriz: $s = (a + b)t = (t - 1/2)(2a + b) = (t - 4/5)(a + 2b)$. İlk iki eşitlikten, önce $a + b = s/t$, $2a + b = s/(t-1/2)$ çıkar, sonra da $a = s/(t - 1/2) - s/t$ ve $b = 2s/t - s/(t - 1/2)$ elde edilir. Bunlar $a + 2b = s/(t - 4/5)$ denkleminde yerine yazıldığında,

$$2/(2t-1) - 1/t + 4/t - 4/(2t - 1) = 5/(5t - 4)$$

denklemi elde edilir. Sadeleştirildikten sonra bu denklem $5t^2 - 13t + 6 = 0$ denklemine dönüşüyor. Bu denklemin $t_1 = 2$ ve $t_2 = 3/5$ çözümlerinden ikincisi koşulları sağlamaz, çünkü $3/5 < 4/5$'tir. Böylece $t = 2$'dir, yani bisikletli ve motorsikletli saat tam 12:00'da yola çıkmışlar.

A275. *Yüz gerçel sayının toplamı sıfırdır. Her $k \geq 1$ için ilk k sayının toplamı negatif olmayacak biçimde bu sayıların sıralanabileceğini kanıtlayınız.*

Çözüm. Önce varsa 0'ları (bunlar $a_1, a_2, \ldots, a_m$ olsun), sonra pozitif sayıları ($a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$), daha sonra da negatif sayıları ($a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{100}$) alarak sayıları sıralayalım. İstediğimiz sıralama budur.

Y271. *Üçüncüden başlayarak tüm terimleri için* $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{OBEB}(a_{n-1}, a_{n-2})}$ *eşitliği sağlanan tüm sınırlı a_1, a_2, a_3, ... pozitif tamsayı dizilerini bulunuz.*

Çözüm. Sadece sabit 2 dizilerinin, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = 2$ eşitliğini sağlayan dizilerin verilen koşulu sağladığını göstereceğiz.

Komşu olan iki a_n, a_{n+1} terimlerinin aralarında asal olduğunu varsayalım. O halde $\text{OBEB}(a_n, a_{n+1}) = \text{OBEB}(a_n + a_{n+1}, a_{n+1}) = \text{OBEB}(a_{n+2}, a_{n+1})$ olacak, yani tüm sonraki komşu terimler de aralarında asal olacak ve her $m \geq n$ için $a_{m+2} = a_{m+1} + a_m$ eşitliği sağlanacak. Dizi sınırlı olduğundan bu olamaz. Dolayısıyla her n için $\text{OBEB}(a_n, a_{n+1}) \geq 2$'dir.

Eğer $a_{n+2} = a_{n+1} = 2$ olacak şekilde bir n bulunursa, $\text{OBEB}(a_n, a_{n+1})$ ya 1 ya 2 olmak zorunda, ama 1 olamayacağını yukarda gördük, demek ki $\text{OBEB}(a_n, a_{n+1}) = 2$; bundan da $a_n = 2$ çıkar. Bu akıl yürütmeyi geriye ve ileriye doğru sürdürürsek, dizinin sabit 2 dizisi olduğunu anlarız.

Şimdi, hiçbir zaman iki tane 2'nin hiçbir zaman peşpeşe gelmeyeceğini varsayalım. $b_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$ olsun. Herhangi bir n alalım. Eğer $a_n \neq a_{n+1}$ ise,

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{\text{OBEB}(a_{n+1}, a_n)} \leq \frac{a_{n+1} + a_n}{2} < b_n.$$

Eğer $a_n = a_{n+1}$ ise,

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{\text{OBEB}(a_{n+1}, a_n)} = \frac{2a_n}{3} < a_n = b_n.$$

Demek ki her iki durumda da $a_{n+2} < b_n$. Bundan da $b_{n+1} \leq b_n$ çıkar. Ve hem $a_{n+2} < b_n$ hem de $a_{n+3} < b_{n+1} \leq b_n$ olduğundan, $b_{n+2} < b_n$. Demek ki pozitif tamsayılardan oluşan $(b_{2n})_n$ dizisi sonsuz azalandır. Bu mümkün olmadığından, koşulları sadece, her n için $a_n = 2$ eşıtliğini gerçekleyen $(a_n)_n$ dizisi sağlar.

Y272. *Düzlem üzerindeki üç dışbükey (konveks) çokgenin tek bir doğruyla kesilmemesi için gerek ve yeter koşul bu çokgenlerin herbirinin diğer ikisinden bir doğruyla ayrılabilmesidir (yani öyle bir doğru bulunacak ki bu çokgen doğrunun bir tarafında, diğer iki çokgen de doğrunun diğer tarafında kalacak.) Kanıtlayınız.*

Çözüm. ($\Rightarrow$) A, B, C dışbükey çokgenlerinden herbirinin diğer ikisinden doğruyla ayrılabileceğini, fakat üçünün bir ℓ doğrusuyla kesilebileceğini varsayalım. Bu doğrunun A, B, C üzerinde bulunan sırasıyla X, Y, Z noktalarını alalım. Y noktasının X ve Z arasında olduğunu varsaymak bize bir şey kaybettirmez. O zaman B'yi A ve C'den ayıran doğru Y noktasını da X ve Z noktalarından ayıracak. Bunun için bu doğrunun ℓ doğrusuyla iki noktada (X ile Y arasında ve Y ile Z arasında) kesmesi gerekmektedir. Bu olamayacağından, A, B, C çokgenlerini bir doğru kesemez.

($\Leftarrow$) Çokgenlerin üçünü de kesen bir doğru bulunmadığını varsayalım. A çokgeninin B ve C'den bir doğruyla ayrılabileceğini göstermek için B ile C'nin ortak teğetlerinden A'ya en yakın olanını alalım. Bu doğru A'yı kesemez, çünkü aksi takdirde A, B, C'nin üçünü de kesen bir doğru bulunacaktır. Şimdi bu doğruyu hafifçe A'ya doğru ötelersek, A'yı, B ve C'den ayıran bir doğru elde ederiz.

Y273. *Bir kare dokuz yatay ve dokuz dikey doğruyla yüz dikdörtgene bölündü. Bu dikdörtgenlerden tam dokuzunun kare olduğu biliniyorsa bu karelerden en az ikisinin birbirine eşit olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm. Dokuz yatay (dikey) doğru kareyi on şeride bölüyor. Dokuz küçük karenin hepsi birbirinden farklı olsaydı, bunlar farklı yatay (dikey) şeritlerde bulunacaktı. Bu durumda geriye kalan onuncu yatay ve dikey şeritlerin genişlikleri birbirine eşit olacaktı. O halde bu yatay ve dikey şeritlerin kesişimindeki dikdörtgen kare olacak, yani onuncu bir kare bulunacaktı. Koşulda sadece dokuz kare bulunduğu söyleniyor. Böylece karelerden birbirine eşit olanlar vardır.

Y274. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ gerçel sayı dizileri şöyle tanımlanıyor: Herhangi iki $a_0 > 0$ ve $b_0 < 0$ sayıları alınıyor. $x^2 + a_n x + b_n = 0$ denkleminin pozitif kökü a_{n+1}, negatif kökü de b_{n+1} olarak alınıyor. Bu dizilerin limitlerini bulunuz.*

Çözüm. Vieta teoreminden $a_n = -(a_{n+1} + b_{n+1}) = a_{n+2} + b_{n+2}(1 - a_{n+2})$ elde edilir. $b_{n+2} < 0$ olduğundan, $a_1 > 1$ ise, $a_1 > a_3 > ... > a_{2m+1} > ... > 1$ olacak, çünkü bir m için $a_{2m+1} < 1$ olsaydı, yukarıdaki eşitlikten $a_{2m-1} < a_{2m+1} < 1$ ve aynı eşitliği m kez kullanarak $a_1 < 1$ elde edecektik. Diğer taraftan bir m için $a_{2m-1} \le a_{2m+1}$ olsaydı, yine yukarıdaki eşitlikten $0 \ge a_{2m-1} - a_{2m+1} = b_{2m+1}(1 - a_{2m+1}) > 0$ elde edecektik. Benzer biçimde $a_1 < 1$ ise, $a_1 < a_3 < ... < a_{2m+1} < ... < 1$ elde edilir. Her iki durumda $(a_{2m+1})_m$ dizisi monoton ve sınırlıdır, dolayısıyla bir A_1 limiti vardır. Benzer biçimde $(a_{2m})_m$ dizisinin de bir A_2 limiti bulunur. $b_n = -(a_n + a_{n+1})$ olduğundan, $(b_n)_n$ dizisinin de $B = -(A_1 + A_2)$'ye eşit limiti bulunur. Şimdi $b_n = a_{n+1}b_{n+1}$ eşitliğinin limitini alarak $B = BA_1 = BA_2$ eşitliğini elde ederiz. $B = 0$ olsaydı $A_1 + A_2 = 0$ olacaktı. $A_1 > 0$ ve $A_2 > 0$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $A_1 = A_2 = 1$ ve $B = -2$'dir.

Y275. 1'*den* 1.000.000'*a kadar tüm tamsayılar beyaz veya siyah renge boyanmıştır. Her adımda bu sayılardan herhangi birisi alınıp, bu sayı ve bu sayıyla ortak böleni olan tüm sayılar karşıt renge boyanıyor. Başlangıçta tüm sayılar siyah ise bu işlemlerle tüm sayılar beyaz yapılabilir mi*?

Çözüm. Soruyu genelleştirerek, n üzerine tümevarımla, n sayıdan oluşan her pozitif tamsayılar kümesinin soruda verilen koşullar altında beyaz renge boyanabileceğini gösterelim. $n = 1$ durumu açıktır. n için boyamanın mümkün olduğunu varsayarak, $n + 1$ için de mümkün olacağını gösterelim. Bu $n + 1$ sayıdan herhangi n tanesi alındığında, varsayımdan dolayı bunlar beyaz renge boyanabilir. Bir n elemanlı altküme beyaz renge boyandığında geriye kalan sayı da beyaz renge boyanmışsa problem çözülmüştür. Her n elemanlı altküme beyaz renge boyandığında geriye kalan sayının siyah olacağını varsayalım.

Sav: *Tek sayıda beyaz sayı elde edilebilirse, tüm sayılar beyaz renge boyanabilir.*

Tek sayıda beyaz sayı elde ettiğimizi varsayalım. Bu beyaz sayıların herbiri için geriye kalan n sayı karşı renge (beyazsa siyaha, siyahsa beyaza) boyanabilir. Sonuçta, beyaz sayılar çift sayı kez, siyah sayılar da tek sayı kez renk değiştirdiği için sayıların hepsi beyaz olacak. Savımız kanıtlanmıştır.

$n + 1$ çift sayı ise, n tane sayıyı beyaz renge boyayarak tek sayıda (n tane) beyaz sayı elde ederiz ve bu durumda Sav'dan dolayı tüm sayılar beyaz renge boyanabilir.

$n + 1$ tek sayı olsun. Sayılar $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ ve her $i = 1, 2, ..., n + 1$ için a_i sayısıyla ortak böleni olan sayıların sayısı m_i olsun. Ortak böleni olan $\{a_i, a_j\}$ ikililerinin sayısı $\sum_{i=1}^{n+1} m_i / 2$ olduğundan, m_i sayıları arasında tek olanların sayısı çifttir. Dolayısıyla m_i sayıları arasında en az biri (diyelim m_j) çifttir. Şimdi a_j sayısını ve bununla ortak böleni olan m_j tane sayıyı beyaz renge boyayarak yine tek sayıda beyaz sayı elde ederiz ve Sav'ı uygularız. ♥