İstanbul Bilgi Üniversitesi'nin düzenlediği

Cahit Arf Matematik Günleri II (2003)

İstanbul Bilgi Üniversitesi lise öğrencileri için Cahit Arf matematik Günleri adı verilen bir matematik yarışması düzenlemiştir. Bu yıl ikincisinin gerçekleştiği yarışma, geçen yıl olduğu gibi iki aşamadan oluşmuştur.

400 kadar öğrencinin katıldığı birinci aşama 30 Nisan 2003'te saat 10'da başlayıp üç saat sürmüştür. Bu birinci aşamada başarılı olan otuz öğrenci ikinci aşamaya katılmaya hak kazanmıştır. İkinci aşama 21 Mayıs 2003'te sabah saat 9'dan akşam saat 5'e kadar sürmüştür. Yarışma sonuçları ikinci sınav notuna göre belirlenir.

Birinci aşamada sorulan sorular ve soruların yanıtları aşağıdadır. İkinci aşamada sorulan sorular kapak konumuzla ilgili olduğu için, o soruları ve yanıtları kapak konumuzun olduğu sayfalarda bulacaksınız.

Ödüller şöyledir:

Birinciye: 1 milyar TL + kitap armağanı + karşılıksız burs.

İkinciye: 750 milyon TL + kitap armağanı.

Üçüncüye: 500 milyon TL + kitap armağanı.

İlk 10 katılımcıya madalya ve liselerine kupa.

İkinci güne katılmaya hak kazananlara başarılarını belgeleyen bir sertifika ve kitap armağanı.

Daha ayrıntılı bilgi için: http://arf.math.bilgi.edu.tr/

Derece alan öğrencilerin ve okullarının listesi aşağıda.

1	Nizameddin Ordulu	Özel Samanyolu Keçiören Fen Lisesi /Ankara
2	Ali Adalı	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
3	Selim Bahadır	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
3	Fatih Deniz	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
5	Kerim Yasin Oktay	Özel Samanyolu Keçiören Fen Lisesi /Ankara
6	Mehmet Kaysi	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
7	Abdullah Murat Turan	Özel Fatih Fen Lisesi /İstanbul
8	Halil İbrahim Güvenç	Özel Şehzade Mehmet Lisesi /Manisa
9	Fatih Altaş	Özel Samanyolu Keçiören Fen Lisesi /Ankara
10	Mehtap Canlıdinç	Özel Fatih Fen Lisesi /İstanbul
Alfebetik Sıralama	Abdullah Akçe	İstanbul Atatürk Fen Lisesi
	Ahmet Aşıcı	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
	Ahmet Hamdi Fazlıoğlu	Özel Özyurt İlköğretim Okulu /İzmir
	Ali Keskin	Özel Samanyolu Keçiören Fen Lisesi /Ankara
	Atafırat Pir	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
	Burak Sağlam	Özel Yamanlar İlköğretim Okulu /İzmir
	Emrah Karagöz	Özel Kasımoğlu Fen Lisesi/İstanbul
	Erkay Uzun	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
	Eylül Doğruel	Özel Saint-Joseph Fransız Lisesi
	Furkan Erden	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
	Hacı Şahin	Özel Samanyolu Keçiören Fen Lisesi /Ankara
	Hale Nur Kazaçeşme	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
	Kayhan Tekin	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
	Mahmut Kaya	Özel Sevgi Çiçeği Anafen Fen Lisesi /İstanbul
	Mehmet Uzunkol	İstanbul Atatürk Fen Lisesi
	Muhammet Nesim Yiğit	Özel Samanyolu Keçiören Fen Lisesi /Ankara
	Onur Hepgürler	Özel MEF Lisesi /İstanbul
	Osman Telli	Özel Kasımoğlu Fen Lisesi/İstanbul
	Rahime Şeyma Can	Özel Yamanlar Fen Lisesi /İzmir
	Saim Saygın	Özel Fatih Fen Lisesi /İstanbul

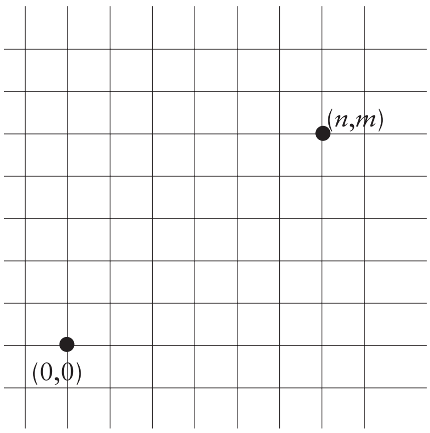
Cahit Arf Günlerine katılan tüm öğrencileri kutlarız. ♥

Cahit Arf Matematik Günleri II - 2003

Birinci Gün

26 Nisan 2003

1. *Aşağıdaki ızgaranın üstünden giderek ve hep doğuya ya da kuzeye giderek* $(0, 0)$ *noktasından* (n, m) *noktasına kaç değişik biçimde gidebilirsiniz?* (n *ve* m *özel sayılar değil.*)

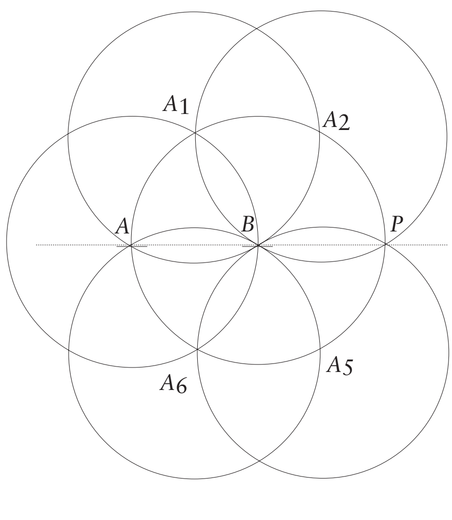


Yanıt: Toplam $n + m$ hareket yapmamız lazım. Bunlardan m tanesi kuzeye, geri kalan n tanesi doğuya olmalı. Demek ki $n + m$ hareketten m tane kuzey hareketi seçmeliyiz. Dolayısıyla yanıt

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

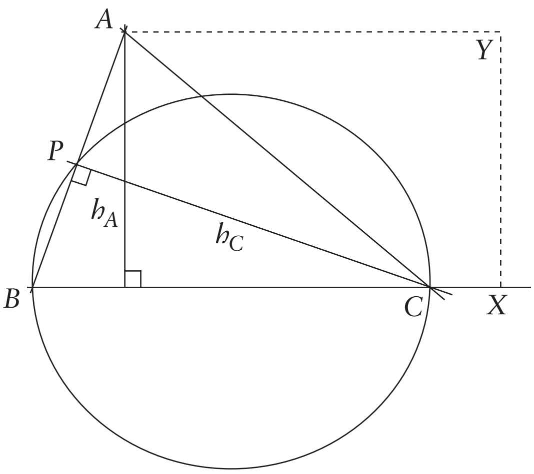
dir.

2. *Bir düzlemde A ve B noktaları verilmiş. AB doğrusu üzerine* $|AB| = |BP|$ *eşitliğini sağlayan P noktasını sadece pergel kullanarak inşa edin.*



Yanıt: B merkezli AB yarıçaplı Ç çemberini çizelim. A merkezli AB yarıçaplı çemberi de çizelim. Bu iki çemberin kesişimleri A_1 ve A_6 olsun. Şimdi A_1 ve A_6 merkezli AB yarıçaplı çemberleri çizelim. Bu çemberlerin Ç çemberiyle kesişimlerine sırayla A_2 ve A_5 diyelim. A_2 ve A_5 merkezli AB yarıçaplı çemberleri çizelim. Bu çemberlerin kesişimi – kolayca görüleceği üzere – P noktasını verir.

3. *Bir ABC üçgeninin BC tabanının uzunluğu ve A ve C'den inen yükseklikleri verilmiş. Pergel ve cetvel kullanarak ABC üçgenini inşa edin.*



Yanıt: (Şekilden takip edin.) A'dan ve C'den inen yüksekliklere sırasıyla h_A ve h_C diyelim. Önce BC'yi koyalım düzleme. A noktasını bulmak istiyoruz. BC çaplı çemberi ve C merkezli h_C yarıçaplı çemberi çizelim (şekilde gösterilmemiş bu son çember). Bu iki çemberin kesiştiği iki noktadan herhangi birine P diyelim. BP doğrusunu çizelim. A noktası bu doğru üzerinde olmalıdır. Şimdi BC üzerinde herhangi bir X noktası alalım. BC'ye dik h_A uzunluğunda bir XY doğru parçası çıkalım. Y'den BC'ye bir paralel çekelim. Bu paralelle BP doğrusunun kesişimi A noktasını verir.

4. $\{(x, y, z) \in (0, 1)^3 : x < y < z\}$ *kümesinin hacmini hesaplayın.*

Yanıt: Toplam hacmi 1 olan $(0, 1)^3$ kübünü, x, y ve z'nin birbirinden büyük ya da küçük olmalarına göre – aradaki hacmi sıfır olan "duvar"ları saymazsak – aşağıdaki gibi altı parçaya ayırabiliriz:

$\{(x, y, z) \in (0, 1)^3 : x < y < z\}$
$\{(x, y, z) \in (0, 1)^3 : x < z < y\}$
$\{(x, y, z) \in (0, 1)^3 : y < x < z\}$
$\{(x, y, z) \in (0, 1)^3 : y < z < x\}$
$\{(x, y, z) \in (0, 1)^3 : z < x < y\}$
$\{(x, y, z) \in (0, 1)^3 : z < y < x\}$

Bu altı bölgenin hacimleri elbette eşittir. Dolayısıyla aranan hacim 1/6'dır.

5. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 1, 2, 3,...$ ve $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2003\}$ *kümesinin kaç elemanı vardır?*

Yanıt: 2003 tane çubuğu yanyana dizelim. Bunlar arasına dört bölme koyarak çubukları beş parçaya ayıracağız. Birinci parçadaki çubuk sayısı x_1'i, ikinci parçadaki çubuk sayısı x_2'yi vs belirleyecek. Toplam 2002 tane "çubuk arası" var. Bu 2002 çubuk arasına dört bölme yerleştireceğiz. Dört bölmeyi

$$\binom{2002}{4} = \frac{2002 \times 2001 \times 2000 \times 1999}{4 \times 3 \times 2}$$

biçimde ayırabiliriz ve yanıt bu sayıdır.

6. $y = x^2$ *parabolünün üstünde diküçgen veren üç nokta alınıyor. Hipotenüsün uzunluğunun 2'den büyük olduğunu kanıtlayın. Hipotenüsün 2 olabileceğini gösterin.*

Answer: $A(a,a^2)$, $B(b,b^2)$ ve $C(c,c^2)$ diküçgenin üç noktası olsun. Hipotenüsün de BC olduğunu varsayalım. AB ve AC doğrularının eğimleri sırasıyla:

$$m_{AB} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a \text{ ve } m_{AB} = \frac{c^2 - a^2}{c - a} = c + a$$

dir. Bu iki doğru, ancak $m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$ ise, yani $(b+a)(c+a) = -1$ ise diktirler. Bundan da

$$a^2 + (b + c)a + bc + 1 = 0.$$

çıkar. Bu, a değişkenli bir polinomdur ve gerçel kökleri vardır. Demek ki diskriminantı negatif olamaz:

$$0 \leq \Delta = (b + c)^2 - 4(bc + 1) = (b - c)^2 - 4.$$

Demek ki BC hipotenüsünün uzunluğu,

$$|BC|^2 = (b - c)^2 + (b^2 - c^2)^2 \geq (b - c)^2 \geq 4$$

eşitsizliğini sağlar ve bu da birinci önermeyi kanıtlar. Bu eşitsizlik ancak $(b - c)^2 = 4$ ve $b + c = 0$ ise bir eşitliktir ve bunun çözümü de köşeleri $A(0,0)$, $B(-1,1)$, $C(1,1)$ olan üçgeni verir, ki bu da hipotenüsü tam 2 olan bir diküçgendir.

7. *Grafiğinin düzlemdeki tüm doğruları kestiği $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon var mıdır?*

Yanıt: Evet $y = x^3$ fonksiyonu. Bunu kanıtlayalım. Herhangi bir doğru alalım. Eğer doğru dikey ise, yani denklemi $x = a$ biçimindeyse, (a, a^3) kesişimdedir. Eğer doğru dikey değilse, denklemi, belli bir m ve b için, $y = mx + b$ biçiminde yazılır. Eğer $m = 0$ ise $(b^{1/3}, b)$ noktası kesişimdedir. Eğer $m \neq 0$ ise, $y = mx + b$ denkleminden x'i çekip, $y = x^3$ denkleminden y'yi bulabiliriz:

$$\left(\frac{y-b}{m}, \left(\frac{y-b}{m}\right)^3\right)$$

noktası kesişimdedir.

8. $x^3 = y^2 + 3y + 2$ *denkleminin tamsayılardaki tüm çözümlerini bulun.*

Yanıt: $x^3 = y^2 + 3y + 2 = (y + 1)(y + 2)$. Demek ki x^3 sayısı $y + 1$ ve $y + 2$ gibi ardışık iki sayının çarpımı. Ardışık sayılar birbirine asal olduğundan, hem $y + 1$ hem de $y + 2$ birer küptürler. İki ardışık sayının ne zaman birer küp olabileceği üzerine düşünelim.

$y + 1$'e c diyelim. Demek ki öyle a ve b tamsayıları var ki, $a^3 = c$ ve $b^3 = c + 1$ eşitlikleri geçerli.

Bu iki denklemin en az iki çözümünü bulmak kolay:

$a = 0, b = 1, c = 0$ ve $a = -1, b = 0, c = -1$.

Bu iki denklemden $b^3 - a^3 = 1$ çıkar, yani $(b - a)(b^2 + ab + a^2) = 1$. Bundan da $b - a = b^2 + ab + a^2 = \pm 1$ çıkar. Bu sayıya ε diyelim. Demek ki $b = a + \varepsilon$ ve $\varepsilon = b^2 + ab + a^2 = (a + \varepsilon)^2 + a(a + \varepsilon) + a^2 = 3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2$, yani $3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0$. Vieta formülünden ($\varepsilon = \pm 1$ olduğundan ve a bir tamsayı olmak zorunda olduğundan), $\varepsilon = -1$, $a = 0$, 1 çözümleri bulunur. Dolayısıyla $c = a^3 = 0$ ya da 1.

Birinci çözüm: $y + 1 = 0$ ve $y = -1$, $x = 0$.

İkinci çözüm: $y + 1 = 1$ ve $y = 0$, ama x için tamsayılarda bir çözüm bulamayız.

9. *a ve n birer doğal sayı.* $a + a^2 + ... + a^n$ *sayısının son rakamı* 1*'dir. a ve n'nin de son rakamının 1 olduğunu kanıtlayın.*

Yanıt: Demek ki $a + a^2 + ... + a^n \equiv 1 \pmod{10}$. Dolayısıyla a tek sayı olmalı. Ayrıca a'nın 5'e bölünemeyeceğini anlamak kolay. Tek sayıların gücünü modülo 10 yazalım (Son dört kolonu daha sonra kullanacağız):

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a	$a+a^2$	$a+a^2+a^3$
1	1	1	1	1	1	2	3
3	9	7	1	3	3	2	9
7	9	3	1	7	7	6	9
9	1	9	1	9	9	0	9

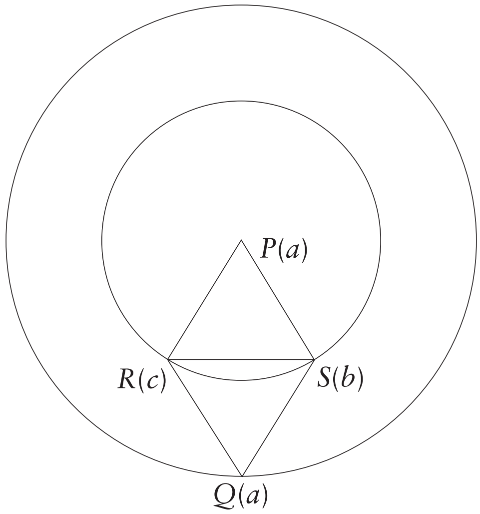
Görüldüğü gibi $a^4 \equiv 1$. Bundan da, her k ve r için $a^{4k+r} \equiv a^r$ çıkar. Dolayısıyla n'yi $4k + r$ yazarsak $(r = 1, 3)$, $a + a^2 + ... + a^n \equiv 1$ denklemi, $k(a + a^2 + a^3 + a^4) + a + ... + a^r \equiv 1$ olarak yazılır.

Eğer $a \equiv 1$ değilse, tablodan da anlaşılacağı üzere $a + a^2 + a^3 + a^4 \equiv 0$'dır ve $a + ... + a^r \not\equiv 1$'dir. Bu durumda $k(a + a^2 + a^3 + a^4) + a + ... + a^r \equiv 1$ denkleminin çözümünün olmadığı açık.

Eğer $a \equiv 1$ ise, $1 \equiv a + a^2 + ... + a^n \equiv n$. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

10. *Bir düzlemin noktaları, aralarındaki mesafe* 1 *olan iki nokta ayrı renklerde olacak biçimde üç renge boyanabilir mi?*

Yanıt: Hayır, boyanamaz! Yanıtın evet olduğunu varsayalım bir an. Renklerimize a, b ve c diyelim. a renkli herhangi bir P noktası alalım (şekildeki dairelerin merkezi.) Bu nokta merkez olmak üzere birim yarıçaplı ve $\sqrt{3}$ yarıçaplı iki çember çizelim. 1 yarıçaplı merkezin her noktası b ve c renklerindedir (yoksa aralarındaki mesafe 1 olan ve a'ya boyanmış iki nokta buluruz.) $\sqrt{3}$ yarıçaplı çemberin her noktasının a renkte olduğunu iddia ediyorum. $\sqrt{3}$ yarıçaplı çemberden herhangi bir Q noktası alalım. P ve Q noktalarını içeren kenarları 1 uzunluğunda ve ortak kenarlı iki eşkenar üçgen çizebiliriz. Bu üçgenler PRS ve QRS olsunlar. R ve S'den biri b renginde, diğeri c renginde (yoksa aralarındaki mesafe 1 olan ve aynı renge boyanmış iki nokta buluruz.) Dolayısıyla Q noktası a renginde olmalıdır. Demek ki $\sqrt{3}$ yarıçaplı çemberin her noktasının rengi a. Şimdi, bu çember üstünde aralarındaki mesafenin 1 olduğu iki nokta bulabiliriz. ♥



Benin'de basılan Newton pulu

Kongo'da basılan Newton pulu


Yeni Gine'de basılan Newton pulu