

Bilgisayar Bilimi Köşesi

Chris Stephenson ve Ali Nesin*
cs@cs.bilgi.edu.tr, anesin@bilgi.edu.tr



Donald Knuth'un Bir Sorusu



Donald Knuth

Knuth, bilgisayar biliminin en önemli temel yapıtlarından olan **Programlama Sanatı** kitabını yazmakla kalmadı, aynı zamanda uygulamaya yönelik son derece pratik programlar da yazdı. Örneğin matematikçilerin vazgeçilmez TeX editör programını Knuth yazmıştır.

Bilgisayar Biliminden Seçilmiş Makaleler adlı kitabında Knuth şu basit görünen soruyu sormuştur:

Biri bana öyle bir program yazsın ki, bu program, 1'den 50'ye kadar olan sayıların kareköklerini iki kümeye ayırsın ve bu iki kümedeki kareköklerin toplamları birbirine olabildiğince yakın olsun.

Buraya kadar soru gerçekten basit: Sayıların kareköklerini almak pek o kadar zor değil, gerçek kareköklere kesirli sayılarla istediğimiz kadar yaklaşabiliriz. Yani karekökleri almak kolay. Şimdi elli karekökü iki kümeye ayırmak gerekiyor. 1'in karekökü olan 1'i kümelere koyarsak, geriye kalan 49 sayıyı o iki kümeye dağıtmamız lazım. 2^{49} seçiminiz var. Yani 50 sayı iki kümeye 2^{49} biçimde ayrılabilir. Bilgisayarımıza tüm bu 2^{49} seçeneği teker teker denetiriz, kümelereki sayıları toplarız, farklarını alırız, farkları bir kenara yazarız, sonra en küçük farkı seçeriz...

Ancak, Knuth'un bizden bir isteği daha var:

Program çağdaş bir bilgisayarda (yani oldukça hızlı) en fazla 10 saniyede yanıtı versin...

Şimdi burada duralım!

Önce neden 50 kök? Sonra neden 10 saniye? Çünkü 2^{49} çok büyük bir sayı, tam 14 rakamı var².

Elbette burada önemli olan 50 ve 10 sayıları değil, olabildiğince çabuk yanıtı veren bir program yazabilmek.

Knuth'un sorusu öyle sanıldığı kadar basit değil. Bu problemin özünde çok çok önemli bir başka problem var.

Her şeyden önce "birbirine olabildiğince yakın olsun" ne demek? En yakın olsun mu demek isteniyor? Yoksa aradaki fark önceden verilmiş bir sayıdan küçük mü olmalı?

Soru zor, çok zor. Bu çok zor soruya şöyle yaklaşalım: Verilen zaman içinde (burada 10 saniye) yapabileceğimizin en iyisini yapmaya çalışalım.

Bu soru bizi hesaplanabilirlik zorluğu (computational complexity) konusunun derinlerine götürecektir.

"Birbirine olabildiğince yakın olsun"u birinci anlamda, yani "mutlak yakınlık" anlamında yorumlayacak olursak, ya 2^{49} seçeneği teker teker deneyip en küçük farkı veren kümeleri bulmalıyız ya da konuya kuramsal yaklaşım matematiksel bir teoremin yardımıyla en iyi sonucu şıp diye bulmalıyız.

"Birbirine olabildiğince yakın olsun"u ikinci anlamda yorumladığımızı varsayalım. Ne yapacağız? Akla ilk gelen çözüm şu: Sayıları kümelere ayır, kümelereki sayıları ayrı ayrı topla, toplamların farkını al ve önceden verilmiş sayıyla karşılaştır. Aradaki fark daha küçükse dur. Değilse, önceden verilmiş elli sayıyı bir başka türlü iki kümeye ayır. Bu işlemi en az bir kez en fazla 2^{49} kez yapacağız... Üstelik istediğimiz sonucu bulacağımız bile kuşkulu: belki de 2^{49} denemeden sonra bile top-

2) 2^{49} 'ün rakam sayısına n dersek, $10^n \leq 2^{49} < 10^{n+1}$ eşitsizlikleri doğru olmalı. Her iki tarafın da 10 'luk tabanda logaritmasını alalım: $n \leq 49 \log_{10}(2) < n + 1$ buluruz. Yani

$$n = \lceil 49 \log_{10}(2) \rceil = \lceil 14,75... \rceil = 14.$$

1 İstanbul Bilgi Üniversitesi öğretim üyesi.

lamların arasındaki fark istediğimiz kadar küçük olmayacak. Ancak ilginç olan şu: şanslıysak bu sorunun çözümünü erken bulabiliriz, ve ancak yanıtı bulduktan sonra çok çabuk ve basit bir hesapla gerçekten çözüm olduğundan emin olabiliriz.

Eğer $n = 49$ ise, $2^{49} = 2^{n-1}$ dir ve bu sayı n cinsinden bir polinom değildir³. n sayısı ile ilgili bir bilgisayar programı – gönül ister ki – n cinsinden bir polinom kadar işlem yaptıktan sonra (yani “az” sayıda işlemden sonra) yanıtı versin.

Knuth’un sorusunun ikinci versiyonu şu özelliğe sahip: Çözümü polinom zamanda bulmasını bilmiyoruz, ancak bulunmuş bir çözümün doğru olup olmadığını polinom zamanda kontrol edebiliriz. Bu özelliğe sahip sorular kümesine NP (non-deterministic polynomial time) denir. Polinom zamanda çözülen sorulara da P adı verilir.

İşte bu, bilgisayar biliminin en önemli problemi: n sayısı ile ilgili bir soru, eğer yanıtının doğruluğu n cinsinden bir polinom zamanda kontrol edilebiliyorsa, o problemi gene n cinsinden bir polinom zamanda çözen bir bilgisayar yazılımı var mıdır?

P’nin NP’ye eşit olup olmadığı bilinmiyor. Bu soruyu çözene Clay Enstitüsü bir milyon dolarlık bir ödül verecek. Genel kanı $P \neq NP$ yönünde.



Donald Knuth, TeX programında yanlış bulanlara para ödülleri dağıtırdı. İşte o ödül çeklerinden biri. Ödüller 1 cent’ten başlayarak her seferinde ikiye katlanırdı.

Zengin olmak isteyen ya $P \neq NP$ eşitsizliğini ya $P = NP$ eşitliğini kanıtlayacak ya da Knuth’un TeX programının 27. hatasını bulacak (bu da aşağı yukarı bir milyon dolar eder⁴!) ♥

Bu bölme sorusunun kısmi çözümleri var, ama

³ Yani hiçbir $p(x)$ polinomu için, her $n \in \mathbb{N}$ için, $2^{n-1} \leq p(n)$ eşitsizliği geçerli değildir.

⁴ Son aldığımız bir habere göre, Knuth vereceği ödüle bir limit getirmiş. Bu arada Knuth’un ödül olarak verdiği çekleri bankaya yatan birini bilmediğimizi de belirtelim. Çekin kendisinin manevi (ve hatta maddi) değeri, çekin değerinden çok daha fazla.

bu konudaki birçok problem gibi bu problem de tam anlamıyla çözülmüş değil.

Bir sonraki sayıda bu problemi çok daha ayrıntılı ele alacağız.

Şimdilik okur, aynı soruyu karekökleriyle değil 1’den 50’ye kadar olan tamsayılarla düşünsün. Bu çok kolay geldiyse, 50 yerine n alsın. Bu da kolay geldiyse aynı soruyu $\{a/b : a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, a + b = 50\}$ kümesi için yanıtlasın... ♥

Türkiye’nin İlk Ve Tek Mantık & Matematik Oyunları

Dergisi Bayilerde!

akıl oyunları

— amiral battı,apartmanlar,çit,toplamaca,rakam yerleştirme,domino —

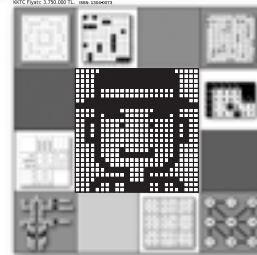
— sayı bulmaca,kelimece,mantık oyunları,kare karalama —

— oyun tanımları —

— üstatlardan oyunlar —

— ödüllü oyunlar —

Her ay bir zekâ oyunu hedyeli



amiral battı ve türevleri • komşu daireler • abece kadar kolay • apartmanlar • çit • toplamaca • rakam yerleştirme • domino • pentamino • yılan • şekil bölmece • bölmece • çapraz bulmaca • hazine avı • ödüllü oyunlar • abc bağlamaca • sayı ağacı • sayı bulmaca • ışın ağı • kuyu • sihirli piramit • kelimece • mantık oyunları • kare karalama

Abonelik için

www.akiloyunlari.com