Geçen Sayımızın Bazı Sorularının Yanıtları

Yanıtlamadığımız sorular aşağıdaki nedenlerden birinden dolayı yanıtlanmamıştır:

1. Soru alıştırma sorusudur ve yanıtı ya kolaydır ya da okurun yanıtlaması gerekir.

2. Yanıtı biz de bilmiyoruzdur.

3. Soru gözümüzden kaçmıştır.

4. Yerimiz yoktur.

5. Okurlar o güzelim soruya ilgi göstermemiştir.

Korsanlar sorusu, sayfa 4.

Soru. *Adları 1, 2, 3, 4, 5 olan beş akıllı korsan 100 altın bulmuşlar. Bu 100 altını korsanlar şu yöntemle paylaşacaklar: En küçük numaralı korsandan başlayarak, her korsan sırası geldiğinde bir paylaşım önerecek. Öbür korsanlar paylaşımı kabul edip etmediklerine dair oy kullanacaklar. Eğer paylaşım oyçokluğuyla kabul edilirse oyun bitecek. Eğer paylaşım kabul edilmezse paylaşımı öneren korsan denize atılacak ve paylaşım önerme sırası bir sonraki korsana geçecek. Birinci korsan nasıl bir paylaşım önermelidir?*

Yanıt: Soruda %50-%50 oylama halinde önerinin kabul edilip edilmeyeceği söylenmiyor. İki seçenek var. Ya %50-%50 oylama halinde öneriyi yapan korsanın önerisi kabul edilecektir ya da o korsan denize atılacaktır.

Eğer %50-%50 oylamada öneri kabul ediliyorsa: Diyelim geriye sadece 4 ve 5 kaldı (1, 2, 3 denize atıldı.) 4 ne önerirse önersin, 5 öneriyi kabul etmez, 4'ü denize atar ve böylece 100 altını cebine indirir. Dolayısıyla 4, merhamete geleceğini umarak, tüm parayı 5'e vermesi gerekir. Ama – neme lazım – o aşamaya gelinmese 4 için daha iyi olur. Bu yüzden, 4, 3'ün önereceği her türlü paylaşımı kabul etmek zorundadır. 3 bunu bildiğinden, önerme sırası kendisine geldiğinde 100 altını kendi almak ister, öbür ikisine nanay verir. 5 bunu kabul etmez elbet, ama olsun, 4 hayatta kalabilmek için kabul etmek zorunda. Demek bu aşamaya gelindiğinde paylaşım 0-0-100-0-0 oluyor. 2 bunu bildiğinden, 4 ve 5'e birer altın önerir, geri kalan 98 altını kendi almak ister. 3 bu paylaşımı kabul etmez elbet ama, 4 ve 5 hiç yoktan bir altın kazanacaklarını bildiklerinden kabul etmek zorundalar. Bu durumda paylaşım 0-98-0-1-1 olur. 1 bunu bildiğinden, 3'e bir altın verir, ya 4'e ya da 5'e iki altın verir (ikisinden birine) ve geri kalan 97 altını cebine atmak ister. Bu durumda paylaşım 97-0-1-0-2 ya da 97-0-1-2-0 olur. Demek ki 1 bu paylaşımı önerir ve bu paylaşım – korsanlar akıllıysa – kabul edilir.

Eğer %50-%50 oylamada öneri kabul edilmiyorsa: Diyelim geriye sadece 4 ve 5 kaldı (1, 2, 3 denize atıldı). 4 ne önerirse önersin, 5 öneriyi kabul etmez, 4'ü denize atar ve böylece 100 altını cebine indirir. Dolayısıyla 4, merhamete gelecegini umarak, tüm parayı 5'e vermesi gerekir. Ama – neme lazım – o aşamaya gelinmese 4 için daha iyi olur. Bu yüzden, 4, 3'ün önereceği her türlü paylaşımı kabul etmek zorundadır. Ama 5, 3 ne önerirse önersin önerisini kabul etmezse tüm altınları cebine indireceğinden emindir. 3 bunu bildiğinden, önerme sırası kendisine geldiğinde 100 altının hepsini birden 5'e verir, ondan merhamet umarak... Ama 3, bu duruma gelmek istemez. 4 de istemez. 2 bunu bildiğinden, 3 ve 4'ün tüm önerileri kabul edeceğini de bilir. Dolayısıyla tüm altınları kendi alır, öbürlerine nanay verir. 5 bu öneriyi kabul etmese bile 3 ve 4 kabul ettiklerinden, bu paylaşım kabul edilir. Demek bu aşamaya gelindiğinde paylaşım 0-100-0-0-0 oluyor. 1 bunu bildiğinden, 3, 4 ve 5'e birer altın önerir, geri kalan 97 altını kendi almak ister. 2 bu öneriyi kabul etmese de 3, 4 ve 5 sıfır altını bir altına yeğlediklerinden 1'in bu önerisini kabul ederler. Demek ki 1 numaralı korsan 97-0-1-1-1 paylaşımını önerir.

Not: Bu çözüm korsanların bu kadarcık analiz yapacak kadar akıllı olduklarını varsayıyor. Bu kadarcık aklı olan korsanlar benim bildiğim 4'e 1 oyla kuralları böyle olan bir oyunu oynamazlar.

Okur Yanıtları: Z. Emir Özer ve Çağlar Yalı'nın düşünüş biçimleri genel olarak doğru ama kanımca bir ayrıntıyı atlayıp yanlış sonuca varmışlar. Oylamanın teklifin kabul edilmesi için mutlak çoğunluğun gerektiği varsayımıyla düşünmüşler önce. Şöyle düşünmüşler:

Sıra 4'e gelince 4'ün önerisi 100 altını doğrudan 5'e vermek olacaktır. [Not: 5 gene de 4'ü denize atabilir, nasıl olsa altınlar kendisinde kalacak] Çünkü, eğer bir altını bile kendine alırsa 5 kabul etmeyecek ve 4'ü öldürerek 100 altını alacaktır. 4 ölmektense 100 altını 5'e verecektir.

Sıra 3'e geldiğinde, 3'ün iki olumlu oya ihtiyacı vardır. O zaman 3'ün en iyi önerisi 100 altını 5'e vermektir. Çünkü, 4 zaten her türlü 0 altın alacağı için kabul edecek, 5 de her türlü yüz altını alacağı için olumlu oy kullanacaktır.

Sıra 2'ye geldiğinde: 2'nin üç oydan ikisini alması gerekmektedir. 2'nin en iyi önerisi 3'e 1 altın, 4'e 1 altın, 5'e 0 altın ve kendine 98 altın almaktır... İşte kanımca burada bir hata var. 3 ve 4 sıfır altını da kabul etmek zorundalar, çünkü kabul etmezlerse sıra 3'e gelecek ve 5 merhamete gelmeyip 3'ü ve 4'ü denize atma şansına sahip olacaktır. Analizin gerisi doğru. Bu iki okurumuza birer kitap armağan edeceğiz.

Tolga Karayayla sadece mutlak çoğunluk durumunda düşünmüş ve aynen yukardaki hatayı yapmış. Tolga Karayayla'ya gene de bir kitap armağan ediyoruz.

Aydın Balekoğlu'nun yanıtı doğru, ancak Aydın Balekoğlu da sadece mutlak çoğunluk varsayımında düşünmüş. Bir kitap da Aydın Balekoğlu'na...

Fonksiyonları Saymak, sayfa 11-12.

Sözü edilen yazıda, n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden örten fonksiyon sayısının

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n \quad (*)$$

olduğu bulunmuştu. Bundan da, $n < m$ olduğunda örten fonksiyon olmadığından, (*) formülünden,

$$n<m \text{ ise } \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n = 0$$

eşitliği bulunmuştu. Oldukça ilginç bir eşitlik. (Burada $m < k$ ise $\binom{m}{k}$'nin 0 olduğunu kabul ediyoruz.)

Eğer $n = m$ ise, her örten fonksiyon bir eşleme olmak zorunda olduğundan, (*) formülünden,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n = n!$$

eşitliği de bulunmuştu. Bu da oldukça ilginç bir eşitlik.

Aynı yazıda, eğer $n = m + 1$ ise (*) formülünden hangi ilginç sonucun çıkacağını sorulmuştu. Yanıtlıyoruz:

$m + 1$ öğesi olan bir A kümesinden m öğesi olan bir B kümesine giden kaç örten fonksiyon olduğunu bir başka yöntemle hesaplayalım. Örten bir fonksiyon altında, A'nın iki elemanı B'nin aynı elemanına gitmek zorundadır ve A'nın geri kalan $m - 1$ elemanı B'nin geri kalan $m - 1$ elemanına bir eşleme biçiminde gider. Demek ki A'dan B'ye giden örten fonksiyon sayısı,

$$\binom{m+1}{2}\binom{m}{1}(m-1)! = \frac{m\times(m+1)!}{2}$$

dir (A'dan iki eleman, B'den bir eleman seçtik ve geri kalan $m - 1$ eleman arasında bir eşleme bulduk). Dolayısıyla,

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^{m+1} = m\frac{(m+1)!}{2}$$

eşitliği geçerlidir.

Sonsuzu Saymak, sayfa 15.

Bu sayıdaki Doğan Bilge'nin "$\mathbb{R}^2$ ile $\mathbb{R}$ Arasında Bir Eşleme" yazısına bakınız. (sayfa 101)

S_n ya da namı diğer Sym(n), sayfa 21-24.

Bu sayıdaki Sayın Özer Çözer'in S_n'de *Eşleniklik Sınıfları* yazısına bakınız. (sayfa 103)

Sym($\mathbb{N}$), sayfa 26.

Soru 1. $\{f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) : f \circ (12) = (12) \circ f\}$ *kümesini bulun.*

Yanıt: $\{f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) : f \circ (12) = (12) \circ f\}$
$= \{f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) : f(\{1, 2\}) = \{1, 2\}\}$.

Kanıt: Bu kümeye A adını verelim. Önce A kümesinin kolaylıkla kanıtlanan şu özelliklerine dikkatinizi çekerim:

P1. $f, g \in A$ ise $f \circ g \in A$.

P2. $f \in A$ ise $f^{-1} \in A$.

P3. $(12) \in A$.

P4. $f \in A$ ancak ve ancak $f \circ (12) \in A$ ise.

Şimdi $f \in A$ olsun, yani $f \circ (12) = (12) \circ f$ eşitliği sağlansın. Bu eşitliğin sağını ve solunu 1'e uygulayalım: $(f \circ (12))(1) = ((12) \circ f)(1)$. Sol taraf $f(2)$'ye eşit. Sağ taraf $(12)(f(1))$'e. Demek ki (12) eşleşmesi $f(1)$'i $f(2)$'ye götürüyor. $f(1) \neq f(2)$ olduğundan ve (12) eşlemesi sadece 1'le 2'nin yerini değiştirdiğinden $f(1)$ ya 1 olmalı ya da 2. Aynı nedenden $f(2)$ ya

1 ya da 2 olmalı. Demek ki $f(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$.

Şimdi tam tersini gösterelim: $f(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$ eşitliğini sağlayan bir $f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ alalım. $f \circ (12) = (12) \circ f$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Eğer $f(1) = 2$ ise $f(2) = 1$'dir, öte yandan $f(1) = 1$ ise, $f(2) = 2$'dir. Birinci şıkta f yerine $f \circ (12)$'yi alarak (ki P4'e göre alabiliriz), $f(1) = 1$ ve $f(2) = 2$ eşitliklerinin sağlandığını varsayabiliriz. Artık $f \circ (12) = (12) \circ f$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. Herhangi bir $x \in \mathbb{N}$ için $(f \circ (12))(x) = ((12) \circ f)(x)$ eşitliğini kanıtlayacağız. Eğer $x = 1$ ise, $(f \circ (12))(1) = f(2) = 2$ ve $((12) \circ f)(1) = (12)(f(1)) = (12)(1) = 2$ eşitlikleri geçerlidir, demek ki bu durumda $(f \circ (12))(x) = ((12) \circ f)(x)$. Eğer $x = 2$ ise, aynen yukardaki gibi $(f \circ (12))(x) = ((12) \circ f)(x)$ elde ederiz. Eğer $x \neq 1, 2$ ise, o zaman $f(x) \neq 1, 2$ ve dolayısıyla $(f \circ (12))(x) = f(x) = (12)(f(x)) = ((12) \circ f)(x)$. Demek ki $x \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun $(f \circ (12))(x) = ((12) \circ f)(x)$ eşitliği geçerli, yani $f \circ (12) = (12) \circ f$.

Soru 2. (1 2) *elemanının* Sym($\mathbb{N}$)*'den bir elemanın karesi olamayacağını kanıtlayın.*

Kanıt: Okura bırakıyoruz.

Soru 3. (1 2) *elemanının* Sym($\mathbb{N}$)*'de sonlu sayıda karenin çarpımı olduğunu gösterin.*

Yanıt: $(12) = [(12)(34)(56)...][(34)(56)(78)...] = [(1324)(5768)...]^2[(3546)(798\ 10)...]^2$. Demek ki (12) iki eşlemenin karelerinin çarpımıymış.

Soru 4. *Yukardaki soruyu* (... 8 6 4 2 0 1 3 5 7 ...) *eşlemesi için yanıtlayın.*

Yanıt: $(... 8\ 6\ 4\ 2\ 0\ 1\ 3\ 5\ 7 ...) = [(01)(23)(45)(67) ...][(12)(34)(56)(78) ...] = [(0213)(4657) ...]^2 [1324)(5768) ...]^2$.

Soru 5. Sym($\mathbb{N}$)*'deki her eleman sonlu sayıda karenin çarpımı mıdır?*

Yanıt: Galiba...

Soru 6. *p bir asal sayı olsun.* Sym($\mathbb{N}$)*'deki her eleman sonlu sayıda elemanın p-inci gücünün çarpımı olarak yazılabilir mi?*

Yanıt: Galiba...

Çekmece ya da Güvercin Yuvası İlkesi, sayfa 50.

Soru 1. *n+1 tamsayı arasında farkları n'ye tam olarak bölünen en az iki sayı vardır.*

Yanıt: Bir tamsayı n'ye bölündüğünde kalan sayı 0, 1, 2, ..., $n - 2$ veya $n - 1$ olabilir. O halde elimizdeki $n+1$ tamsayının en az ikisi n'ye bölündüğünde aynı kalanı bırakır, dolayısıyla bu sayıların farkları n'ye bölünür.

Soru 2. *Bir düzlem üzerindeki 25 noktanın herhangi üçü arasındaki minimum uzaklık 1'den az olsun. Bu noktaların en az 13'ünü içine alan 1 yarıçaplı bir çemberin varlığını gösteriniz.*

Yanıt: Düzlem üzerindeki 25 noktadan herhangi birine A adını verelim ve A merkezli 1 yarıçaplı ilk çemberimizi çizelim. Bütün noktalar bu çemberin içindeyse soru çözülmüştür, değilse bu çemberin dışındaki bir noktaya B adını verelim ve B merkezli 1 yarıçaplı ikinci çemberimizi çizelim. Her nokta ya ilk çemberin ya da ikinci çemberin içinde olacağından, çemberlerin biri 25 noktanın en az 13'ünü içerecektir.

Soru 3. *n ve k pozitif iki tamsayı olsun. n'nin k'ye bölündüğünde aynı kalanı veren en az iki kuvveti olduğunu gösteriniz.*

Yanıt: $n^1, n^2, ..., n^k, n^{k+1}$ sayılarını k'ya böldüğümüzde elde edeceğimiz kalanlar 0, 1, ..., $k-1$ kümesinde olacağından en az iki kalan aynı olmak zorundadır.

Soru 4. *7'nin* 0001 *ile biten bir kuvveti olduğunu gösteriniz.*

Yanıt: 3'üncü sorudan yararlanarak, 7'nin 10000'e bölündüğünde aynı kalanı veren iki ayrı kuvveti vardır diyebiliriz. Bunlar 7^n ve 7^m olsun. Diyelim $n > m$. Bu durumda, 10000, $7^n - 7^m = 7^m(7^{n-m} - 1)$ sayısını böler. Ama 10000 ve 7^m aralarında asal, demek ki 10000, $7^{n-m} - 1$ sayısını böler. O halde 7^{n-m}, 10000'e bölündüğünde 1 kalanını verir yani 0001 ile biter.

Soru 5. *Yarıçapı 1 olan bir çemberin içinde alınan altı noktadan en az ikisi arasındaki uzaklığın 1'den küçük veya eşit olacağını gösteriniz.*

Yanıt: Çemberi altı yarıçap aracılığıyla altı eşit sektöre bölelim. Bu yarıçaplardan biri verilen altı noktadan biri olan P'den geçsin. Geriye kalan beş noktanın ikisi aynı sektöre girerse çözüm biter. Girmezse en az bir diğer noktanın P'yi içeren yarıçapla ayrılmış iki sektörden birinde olması gerekir ki bu durumda da soru çözülmüş olur.

Soru 6. *Otuz günde her gün en az bir hap içmek koşuluyla 45 hap içen bir hastanın, içtiği hap sayısının toplam 14 olduğu ardışık bir günler dizisi olduğunu gösterin.*

Yanıt: Hastanın ilk günden i'inci günün sonuna kadar aldığı hap sayısını a_i ile gösterelim. Demek ki a_i artan bir dizi. Şimdi,

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_{30}\}$$

ve

$$B = \{a_1 + 14, a_2 + 14, ..., a_{30} + 14\}$$

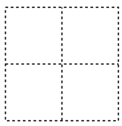
kümelerine bakalım. A'daki elemanların herhangi ikisinin aynı olamayacağı açık. Dolayısıyla B'deki elemanlarda aynı olamaz. Şimdi A'nın ve B'nin elemanlarını yan yana yazalım:

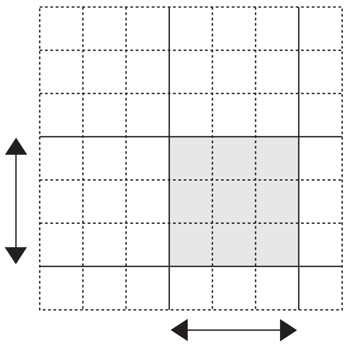
$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$$

Bu tamsayıların en büyüğü ancak 59 olabilir. Halbuki yukarıda 60 sayı var. Öyleyse en az ikisi eşit olmak zorundadır. Buradan $a_i = a_j + 14$ koşulunun en az bir i, j çifti için sağlandığı çıkar.

Karenin Kare Sayısı, sayfa 52.

$n \times n$ tane noktadan oluşmuş düzgün bir karede (kenarları yatay ve dikey) kaç kare vardır? Örneğin, $n = 3$ ise (yandaki şekil üstünde sayılabileceği gibi) toplam 5 kare vardır, dördü küçük, biri büyük.





Genel yanıt oldukça kolay. $i \times i$ boyutlu bir karenin tabanı için $n - i + 1$ seçimimiz var (tabanın başlangıç noktasını seçmek yeterli.) Yüksekliği için de. Demek ki $(n - i + 1)^2$ tane $i \times i$ boyutlu kare var. Bu sayıları $i = 1, 2, \ldots, n$ için toplamalıyız. Şu sayıyı elde ederiz:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Bu toplamın kapalı bir formülü vardır:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir bu formül.

Sayfa 55. Yazı Tura Sorusu

Bu sayıdaki Sayın Mete Lick'in *Yazı Tura Sorusu* yazısına bakınız. (sayfa 99)

Sayfa 61. Vay Canına!

Teorem.

$1/3(2 + 1/4(3 + 1/5(4 + 1/6\ (5 + 1/7(6 + \ldots))))) = 1.$

"Kanıt": Sol taraftaki "işlem"i yaparsak,

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3\times4} + \frac{4}{3\times4\times5} + \frac{5}{3\times4\times5\times6} + \ldots$$

eşitliğini kanıtlamamız gerektiğini anlarız, yani

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2(n-1)}{n!} = 1$$

eşitliğini. Başlayalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

eşitliğinin bilindiğini varsayıyoruz. Demek ki,

$$1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = e^x$$

yani, $x \neq 0$ ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Burada x yerine x^2 koyarsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{n!} = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

elde ederiz. İki tarafın da türevini alırsak, her $x \neq 0$ için,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)x^{2(n-1)-1}}{n!} = \frac{(e^{x^2}-1)'x^2 - (e^{x^2}-1)(x^2)'}{x^4} = \frac{2xe^{x^2}x^2 - (e^{x^2}-1)2x}{x^4}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi $x = 1$ alalım:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)}{n!} = 2 \text{ yani } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2(n-1)}{n!} = 1.$$

♥