

Kapak Konusu: Çizgeler

# Çizgelerin Anlam ve Önemi



Evren anlayamayacağımız kadar karmaşık ve çetrefillidir. Her an, çok azını algıladığımız, birçoğunu algılayamadığımız, algılasak da farkına varmadığımız, hatta algılamak bile istemediğimiz, dahası, algılasak ve algıladığımızın farkına varsak da o algıladıklarımızla ne yapacağımızı bilemediğimiz milyonlarca, milyarlarca, belki de sonsuz sayıda veriyle karşı karşıyayız. Varolabilmek için, anlayamayacağımız kadar karmaşık olan bu evreni bir biçimde biraz olsun anlamaya çalışmalıyız. Bunun için de “yalan söylemek”, birçok veriyi yoksaymak ya da değiştirmek zorundayız. Yalan söylemenin en yalın biçimlerinden biri, varlıklar arasındaki ikili bir ilişkiyi bir “çizge” biçiminde göstermektir.

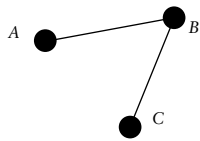
Sözgelimi insanlar arasındaki tanışıklık ilişkisini ele alalım... Yakından ya da uzaktan tanımak, “kanka” olmak, gözü ısırmak, şöyle böyle tanımak, içtiği su ayrı gitmemek, can ciğer olmak, adını duymak, eş dost olmak, sıkı fıkı olmak, gıyaben ya da ailece, çocukluktan, askerlikten, cezaevinden ya da yolculuktan tanışmak... Bin bir türlü tanışıklık ilişkisi vardır. Hiçbir tanışıklık hiçbir tanışıklığa benzermediği gibi, her tanışıklık ilişkisi her an değişir.

Tanışıklığı derecelendirmek de mümkün değildir. Her şeye bir not vermeye alıştırılmışız belki ama verilen o not çoğu kez aldatıcıdır. Güzelliğe, dostluğa, sevgiye, tanışıklığa not verilmez örneğin.

Doğru olsun ya da olmasın, biz tanışıklığa bir not verelim. İki kişi birbirini ya tanısin ya da tanımasın. Bunun ortası, “eh işte”si olmasın. Yani ya hep ya hiç! Ya sıfır ya bir! Ya herro ya merro!

Daha fazla yalan söylemek bir hayli güç olmalı!

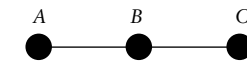
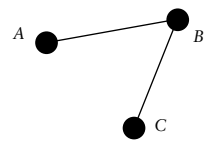
Barış, Ahmet ve Canan’ı tanıyorsa, ama Ahmet’le Canan birbirini tanıyorsa, bu durumu aşağıdaki gibi bir şekilde gösterebiliriz. Bu şekilde noktalar insanları, noktaların arasındaki çizgiler de tanışıklık ilişkisini simgeler.



Ne Ahmet ne Barış ne de Canan birer noktadır. Aralarındaki tanışıklık da bir çizgi değildir. Elbette! Ama biz öyle gösterdik...

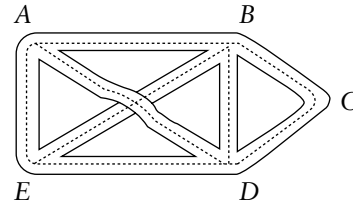
Anlaşılacak kadar karmaşık olan insanı ve aralarındaki tanışıklık ilişkisini yukardaki basit şekilde gösterdik. Birçok veriyi yoksayarak... Yani yalan söyleyerek...

Berlin’le Antalya ve Chicago arasında uçak seferi varsa, ama Antalya’yla Chicago arasında uçak seferi yoksa, bu durumu (şehirler arasındaki mesafeyi yoksayarak), aynen yandaki gibi gösterebiliriz. Burada noktalar şehirleri, noktaların arasındaki çizgiler de “uçak seferi var” ilişkisini simgeler.

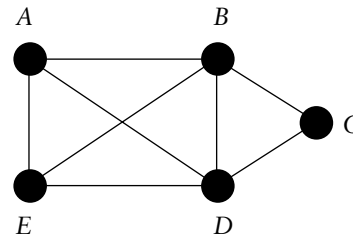


Daha sade olmak istiyorsak, yukardaki durumu, soldaki gibi de gösterebiliriz.

Bir de aşağıdaki yol haritasına göz atalım.



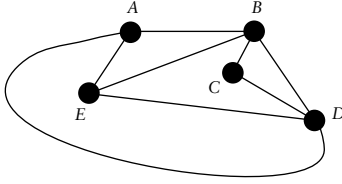
Bu haritayı noktalar ve çizgiler kullanarak, belki biraz daha az estetik ama çok daha kolay anlaşılır biçimde aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Bir çizge (ya da graf) işte yukarıdaki gösterdiğimiz gibi bir şekildir<sup>1</sup>. Nokta sayısı çok çok artabilir, sonsuz bile olabilir. Bazı noktalar arasına “ilişki var” anlamına bir çizgi çekilir. Çizgilerin boyu bosu, şekli şemali önemli değildir, çizgilerin sadece varlıkları ya da

<sup>1</sup> Matematiksel tanım birazdan verilecek.

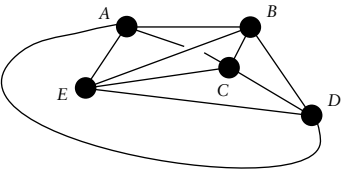
yoklukları önemlidir. Çizgi sadece ve sadece iki nokta arasında bir ilişki olduğunu simgeler. Noktaların konumu da önemli değildir. Çizgiler istenmedik bir biçimde kesişebilirler de. Örneğin, yukardaki çizgede  $EB$  ve  $AD$  çizgileri kesişiyorlar, ama kesiştikleri yerde çizgenin bir noktası yok.



Bu çizgeyi yandaki gibi çizgilerin kesişmediği bir şekilde de gösterebilirdik.

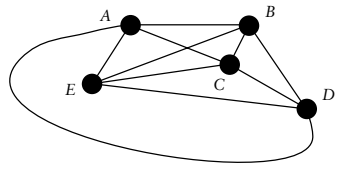
Eğer C'yle A ve E arasında da birer

çizgi olsaydı, çizgemizi, kesişmemesi gereken çizgilerin kesişmeyeceği biçimde çizemezdik. İstenmedik kesişimlerin olmayacağı biçimde düzleme çizilebilen çizgelere **düzlemsel çizge** denir.



Öte yandan sonlu her çizge üç boyutlu (içinde yaşadığımız) uzaya, kesişmemesi gereken çizgilerin kesişmeyeceği biçimde çizilebilir.

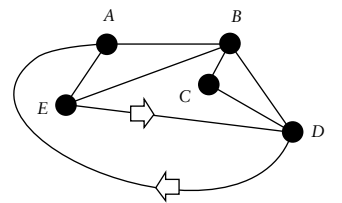
Örneğin yukardaki çizgeye  $AC$  ve  $CE$  çizgilerini üç boyutta kesişmeyecek biçimde ekleyebiliriz.



İki boyutta çizmek daha kolay olduğundan, çizgelerimizi iki boyutta çizeceğiz. Dolayısıyla kimi zaman çizgilerimiz, yukarıdaki şekilde olduğu gibi, istemediğimiz halde kesişecek.

Çizgelerimizde şehirler arası mesafe, yolun biçimi, irtifa gibi bilgiler kayboldu, sadece şehirler arasında bir yolun olup olmadığı bilgisi kaldı. Mesafelerin varlığı çok çok (ama gerçekten çok çok) önemliyse, yani vazgeçilmezse, illa da olması gerekiyorsa, örneğin bir yol haritası çiziyorsak, çizgilerin üstüne mesafeyi bildiren bir sayı yazabiliriz. Ama yazmasak daha iyi olur...

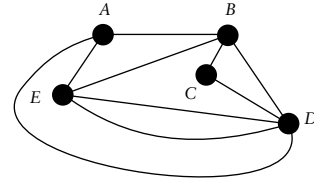
Çizgelerimizde şehirler arası mesafe, yolun biçimi, irtifa gibi bilgiler kayboldu, sadece şehirler arasında bir yolun olup olmadığı bilgisi kaldı. Mesafelerin varlığı çok çok (ama gerçekten çok çok) önemliyse, yani vazgeçilmezse, illa da olması gerekiyorsa, örneğin bir yol haritası çiziyorsak, çizgilerin üstüne mesafeyi bildiren bir sayı yazabiliriz. Ama yazmasak daha iyi olur...



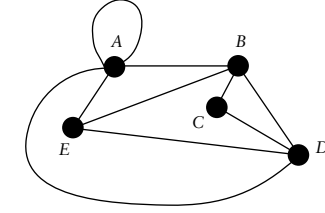
koymasak daha iyi olur...

Kimi zaman da iki şehir arasında (sözgelimi  $E$ 'yle  $D$  arasında) iki değişik yol olabilir, o zaman iki nok-

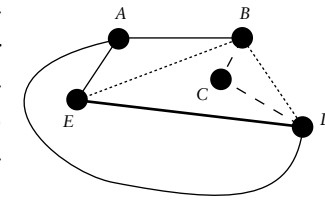
ta arasında birkaç çizgi birden olabilir. Ama olmasa daha iyi olur...



Anlaşılmaz bir nedenden  $A$  şehrinde gene  $A$  şehrine giden ve başka bir şehirden geçmeyen bir yol olabilir. Ama böyle gereksiz yollar (tekdöngüler) olmasa daha iyi olur...

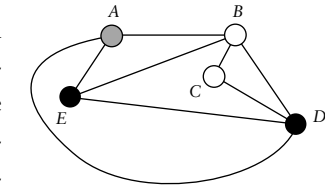


Bir nedenle, noktalar arasındaki çizgileri değişik renklere boyamak zorunda kalabiliriz... Yani noktalar arasındaki çizgilerin türleri olabilir (otoyol, patika, sokak, cadde, bulvar...)



Ama tek tür çizgi olmasa daha iyi olur...

Bir başka nedenle noktaları renklere boyamak zorunda kalabiliriz, örneğin, illeri ilçelerden, ilçeleri kasabalardan, kasabaları köylerden ayırmak zorunda kalabiliriz. Ama böyle bir zorunluluğun olmaması her şeyi daha basitleştirir.



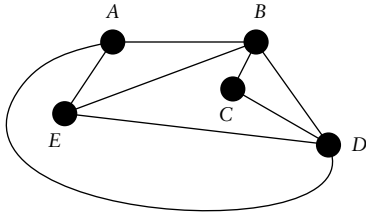
Bu sayıda ele alacağımız çizgelerde genellikle iki nokta arasında birden fazla çizgi olmayacak, bir noktadan gene kendisine giden bir çizgi olmayacak, çizgilerin yönü, kalınlığı, rengi, kokusu olmayacak, çizgilere bir sayı iliştilirilmiş olmayacak, noktaları çeşitli sınıflara ayıran yapay bir özellik olmayacak... Yani daha çok en basit çizgilerden sözedeceğiz. Bu tür çizgelere **yalın çizge** diyelim. Bundan böyle "yalın çizge" yerine **çizge** terimini kullanacağız. Gerekirse renklendirilmiş, yönlendirilmiş, derecelendirilmiş, numaralandırılmış, çok çizgili çizgilerden sözederiz, ki gerekecek.

Bu sayıda ele alacağımız çizgilerde genellikle iki nokta arasında birden fazla çizgi olmayacak, bir noktadan gene kendisine giden bir çizgi olmayacak, çizgilerin yönü, kalınlığı, rengi, kokusu olmayacak, çizgilere bir sayı iliştilirilmiş olmayacak, noktaları çeşitli sınıflara ayıran yapay bir özellik olmayacak... Yani daha çok en basit çizgilerden sözedeceğiz. Bu tür çizgelere **yalın çizge** diyelim. Bundan böyle "yalın çizge" yerine **çizge** terimini kullanacağız. Gerekirse renklendirilmiş, yönlendirilmiş, derecelendirilmiş, numaralandırılmış, çok çizgili çizgilerden sözederiz, ki gerekecek.

### Çizgenin Matematiksel Tanımı

Adına  $G$  diyeceğimiz yukarıdaki çizgeye geri dönelim. Yukarda,  $G$ , matematiksel olarak değil, görsel olarak tanımlanmıştı. Şimdi  $G$  çizgesinin matematiksel tanımını bulacağız.

$A, B, C, D, E$  noktalarına çizgenin **noktaları** de-



nir<sup>2</sup>.  $G$  çizgesinin noktalar kümesi matematikte  $V(G)$  olarak gösterilir<sup>3</sup>. Demek ki örneğimizde,

$$V(G) = \{A, B, C, D, E\}.$$

İki nokta arasındaki çizgilere **kenar** denir<sup>4</sup>. Her kenarı iki noktalı bir küme olarak gösterebiliriz. Örneğimiz olan  $G$  çizgesinin kenarları şunlardır:  $\{A, B\}$ ,  $\{A, D\}$ ,  $\{A, E\}$ ,  $\{B, C\}$ ,  $\{B, D\}$ ,  $\{B, E\}$ ,  $\{C, D\}$ ,  $\{D, E\}$ .

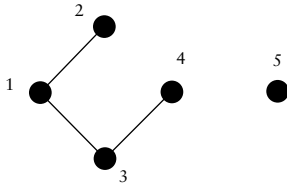
$G$ 'nin kenarlar kümesi matematikte  $E(G)$  olarak gösterilir<sup>5</sup>. Demek ki,

$$E(G) = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{D, E\}\}.$$

Şimdi artık  $G$  çizgesini  $(V(G), E(G))$  ikilisi olarak gösterebiliriz, ve bu gösterim bir çizgenin matematiksel tanımının nasıl olması gerektiğini bize fısıldar.

Matematiksel anlamda bir **çizge** (daha doğrusu yalın bir çizge), bir  $V$  kümesiyle  $V$ 'nin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir  $E$  kümesinden oluşur.  $V$ 'nin elemanlarına **nokta**,  $E$ 'nin elemanlarına **kenar** denir. Bir kenarın iki noktasına **komşu noktalar** denir.

Eğer  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ve  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$  ise,  $(V, E)$  çizgesini, olarak görselleştirebiliriz. Bu çizge tek parça olmadığından, bu çizge **tekparça çizge** değildir, iki ayrı parçadan oluşmuştur, birbiriyle bağımlı olan  $\{1, 2, 3, 4\}$  parçası ve tek başına duran  $\{5\}$  parçası.



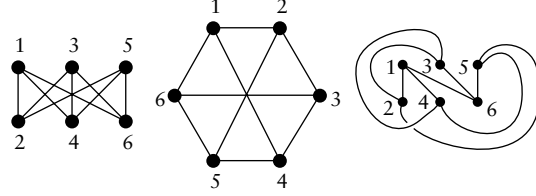
Çizgeyi nasıl görselleştirdiğimizin hiçbir önemi yoktur elbette. Noktaları istediğimiz gibi kâğıda yerleştirebiliriz. Aralarındaki kenarları istediğimiz gibi çizebiliriz, ister bir doğru parçası olarak, ister bir eğri olarak. Örneğin, eğer noktalar kümesi

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ise ve tek sayılarla çift sayılar arasında bir kenar varsa, yani kenarlar kümesi

$$E = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,6\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{5,2\}, \{5,4\}, \{5,6\}\}$$

ise,  $(V, E)$  çizgesini aşağıdaki şekillerden herhangi biri olarak görselleştirebiliriz:



Çizgeleri yukardaki gibi görsel olarak ifade etmenin büyük avantajları olsa da, nokta sayısı çok olan çizgeleri görsel olarak ifade etmek kolay olmayabilir.

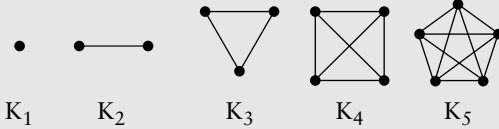
Uç noktaları  $A$  ve  $B$  olan bir kenarı  $\{A, B\}$  diye yazacağımıza kısaca  $AB$  olarak yazarsak yazılımımız sadeleşir. Elbette, bu yazılımla,  $AB = BA$  eşitliği geçerlidir.

Yukardaki çizge tanımının sadece yalın çizgeler için geçerli olduğunu unutmayın. Örneğin  $A$  ve  $B$  noktaları arasında iki ayrı kenarın olduğu bir çizgede bu iki kenarın her ikisini birden  $\{A, B\}$  olarak gösteremezdik.

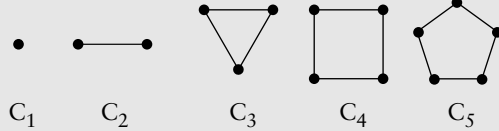
**Çizgelerin Önemi.** Çizgeler son derece önemlidir. ♦

## Ünlü Çizgeler

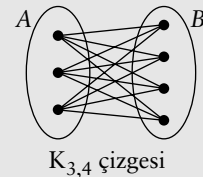
$K_n$  çizgesi, tüm kenarların varolduğu  $n$  noktalı çizgedir. Bunlara **tamçizge** denir.



$C_n$  çizgesi, her noktaya tam iki kenar değen tekparça  $n$  noktalı çizgelerdir. Bunlara **döngü** denir.



$K_{n,m}$  çizgesi, noktaları  $n$  ve  $m$  elemanlı olmak üzere iki  $A$  ve  $B$  kümesine ayrılmış,  $A$ 'daki her noktanın  $B$ 'deki her noktaya bağlandığı başka da kenarı olmayan çizgedir.  $K_{n,m}$ 'ye **iki parça** ya da **iki kümeli tamçizge** denir.



2 “Köşe” ya da “düğüm” dendiği de olur.  
3  $V(G)$ 'nin  $V$ 'si İngilizce “uç nokta, köşe” demek olan *vertex* sözcüğünün  $V$ 'sidir.  
4 “Çizgi”, “bağıntı”, “ayrıt” dendiği de olur.  
5  $E(G)$ 'nin  $E$ 'si İngilizce “kenar” demek olan *edge* sözcüğünün  $E$ 'sidir.