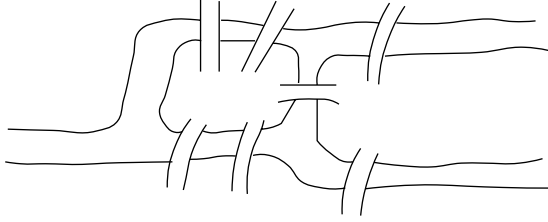




Kapak Konusu: Çizgeler

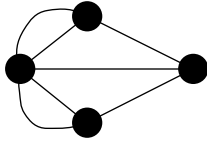
Euler Turu

Çizge kuramının bilinen en eski sorusu “Königsberg köprü problemi”dir.



Yukarda, Königsberg’deki Pregel nehrinin ve karalar arasında geçişi sağlayan yedi köprüünün planını görüyorsunuz. Bu yedi köprüünün herbirinden sadece bir kez geçecek bir yolculuk mümkün müdür?

Euler 1736’da bunun mümkün olmadığını göstermiştir: Kara parçalarını (yani nehrin iki yakasını ve iki adacığı) dört noktayla, yedi köprüyü de bu noktalar arasına koyacağımız kenarlarla gösterirsek



çizgesini¹ elde ederiz. Her köprüden tam bir kez geçmek demek, yukardaki çizgenin her kenarından tam bir kez geçecek bir yolculuk bulmak demektir. Bir önceki yazıda da gördüğümüz üzere bu mümkün değildir, çünkü derecesi² tek olan nokta sayısı 0 ya da 2 değildir.

Her kenardan tam bir kez geçen ve başladığı noktaya geri dönen yolculuklara **Euler turu** denir. Euler turu olan çizgelerin tekparça ve her noktasının çift dereceli olması gerektiğini biliyoruz, bir

1 Bu yazıda iki nokta arasında birden fazla kenarın olduğu çizgeleri de kabul edeceğiz. Hatta çizgelerimizde, başka bir noktadan geçmeden, bir noktadan gene aynı noktaya giden **tekdöngüler** de, yani AA gibi kenarlar da olabilir.

2 Bir önceki yazıda tanımlandığı üzere, A noktasının derecesi, A noktasına değen kenar sayısıdır. Eğer AA bir kenarsa, bu kenar A ’nın derecesine 2 katar. Eğer $A \neq B$ ise ve çizgede AB kenarı varsa, bu kenar A ’ya 1 derece katar.

önceki yazıda görmüştük bunu. Şimdi bu iki koşulun çizgede Euler turu olması için yeterli olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem [Euler, 1736]. Her noktasının derecesinin çift olduğu sonlu ve tekparça bir çizgede Euler turu vardır.



Önce bir önsav:

Önsav. Her noktasının derecesinin en az iki olduğu bir çizgede, başladığı noktaya dönen ve hiçbir kenardan iki kez geçmeyen bir yolculuk vardır.

Kanıt: Dikkat edilirse önsavımız yolculuğun her kenardan ya da her noktadan geçeceğini söylemiyor.

A_0 çizgenin herhangi bir noktası olsun. A_0 noktasından başlayan bir yolculuğa çıkacağız.

Önce A_0 ’dan A_0 ’a bağlı herhangi bir A_1 noktasına gidelim.

Yolculuğumuza devam ediyoruz: A_1, A_0 ’a bağlı; ama derecesi en az iki olduğundan A_1 ’e bir başka yol daha değmeli. Diyelim A_1, A_2 noktasına A_0A_1 yolundan değişik bir yolla bağlı, diyelim A_1A_2 . Şimdi A_0A_1 diye başladığımız yolculuğa A_1 ’den A_2 ’ye giderek devam edelim.

Yolculuğumuza devam ediyoruz: A_2, A_1 ’e bağlı, ama derecesi en az iki olduğundan A_2 ’ye bir başka yol daha değmeli, diyelim A_2A_3 . Şimdi $A_0A_1A_2$ diye başladığımız yolculuğumuza A_2 ’den A_3 ’e giderek devam edelim.

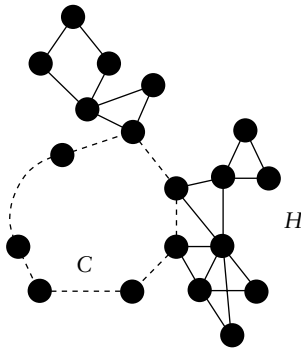
Yolculuğumuza devam ediyoruz: A_3, A_2 ’ye bağlı; ama derecesi en az iki olduğundan A_3 ’e bir başka yol daha değmeli, diyelim A_3A_4 . Yolculuğumuza A_3 ’ten A_4 ’e giderek devam edelim.

Bu yolculuğu böylece sürdürelim.

$A_0A_1A_2A_3A_4\dots$ diye bir yolculuktayız, ve her i için $A_iA_{i+1} \neq A_{i+1}A_{i+2}$.

Çizge sonlu olduğundan, bir zaman sonra aynı noktaya ikinci kez rastlamalıyız. Örneğin $A_4 = A_7$ olabilir, hatta $A_8 = A_9$ olabilir. Daha önce geçtiğimiz bir noktaya ilk rastladığımızda duralım. Bu (birbirine eşit olan) ilk noktayı ve arasındaki yolu alalım. Örneğin ilk nokta eşitliği A_4 ve A_7 'de rastlanıyorsa, $A_4A_5A_6A_7$ yolunu ele alalım. Bu yol başladığı noktaya (örneğimizde A_4) geri döner (örneğimizde $A_7 = A_4$ noktasına) ve iki kez aynı kenardan geçmez. \square

Euler Teoremi'nin Kanıtı: Çizgemize G diyelim. Kanıtımız G 'nin kenar sayısına göre tümevarımla olacak. Çizgemiz tekparça olduğundan, derecesi 0 olan nokta yoktur. Dolayısıyla her noktanın derecesi en az ikidir (ve çifttir). Bir önceki önsava göre çizgede aynı kenardan iki kez geçmeyen ve başladığı noktaya geri dönen bir yolculuk vardır. C böyle bir yolculuk olsun. Eğer C , G 'deki tüm kenarları içeriyorsa C bir Euler turudur ve işimiz bitmiştir. İçermiyorsa G 'den C 'deki kenarları çıkardığımızda, G 'den daha az kenara sahip, muhtemelen birkaç parça ve yine her noktasının derecesi çift olan bir H çizgesi elde ederiz.



Tümevarım varsayımına göre, H çizgesinin her parçasında bir Euler turu vardır. Ayrıca H çizgesinin her parçasının C ile ortak en az bir noktası olmalıdır, yoksa G tekparça olamazdı. G 'de aradığımız Euler turunu şöyle elde edelim: C 'deki kenarları izleyelim ve H çizgesinin bir noktasına gelince o noktanın bulunduğu parçanın Euler turunu izleyip aynı noktaya geri dönelim ve C 'de ilerlemeye devam edelim. C 'deki başladığımız noktaya dönünce G 'nin Euler turunu tamamlamış oluruz. \square

1-7 Noktalı Euler Çizgeleri

1-6 noktalı	\cdot 0	 2^3	 2^4
 2^5	 $2^4 \cdot 4$	 $2^3 \cdot 4^2$	 4^5
 2^6	 $2^5 \cdot 4$	 $2^4 \cdot 4^2$	 $2^4 \cdot 4^2$
 $2^3 \cdot 4^3$	 $2^2 \cdot 4^4$	 $2 \cdot 4^5$	 4^6
7 noktalı	 2^7	 $2^6 \cdot 4$	 $2^6 \cdot 4$
 $2^6 \cdot 6$	 $2^5 \cdot 4^2$	 $2^5 \cdot 4^2$	 $2^5 \cdot 4^2$
 $2^5 \cdot 4^2$	 $2^5 \cdot 4 \cdot 6$	 $2^4 \cdot 4^3$	 $2^4 \cdot 4^3$
 $2^4 \cdot 4^3$	 $2^5 \cdot 6^2$	 $2^4 \cdot 4^2 \cdot 6$	 $2^3 \cdot 4^4$
 $2^3 \cdot 4^4$	 $2^3 \cdot 4^4$	 $2^3 \cdot 4^3 \cdot 6$	 $2^2 \cdot 4^5$
 $2^2 \cdot 4^5$	 $2^2 \cdot 4^5$	 $2^2 \cdot 4^5$	 $2^2 \cdot 4^4 \cdot 6$
 $2^2 \cdot 4^4 \cdot 6$	 $2 \cdot 4^6$	 $2 \cdot 4^6$	 $2^2 \cdot 4^3 \cdot 6^2$
 $2 \cdot 4^5 \cdot 6$	 4^7	 4^7	 $2 \cdot 4^4 \cdot 6^2$
 $4^6 \cdot 6$	 $4^6 \cdot 6$	 $4^5 \cdot 6^2$	 $4^4 \cdot 6^3$
 $4^3 \cdot 6^4$	 6^7		

Bir önceki sayfada her kenarının derecesinin çift olduğu $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ noktalı tekparça ya-
lın çizgeleri bulacaksınız.

Bunlara **Euler çizgeleri** denir.

Her kenardan bir kez geçerek ve el kaldırıma-
dan tek hamlede çizilen çizgeleri saptayalım şimdi.
Bir önceki yazıda gördüğümüz üzere bu tür çizge-
ler tekparça olmalı ve derecesi tek olan 0 ya da 2
noktası olmalı. Şimdi göreceğimiz üzere, bu koşullar,
çizgenin her kenarından bir kez geçerek tek
hamlede çizilebilmesi için yeterlidir.

Teorem. *Tek dereceli nokta sayısının 0 ya da
2 olduğu tekparça çizgeler tek hamlede (el kaldır-
madan) her kenardan sadece bir kez geçilerek çiz-
ilebilir.*

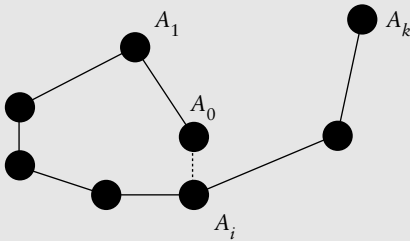
Kanıt: Çizgemize G diyelim. Eğer tek dereceli
nokta sayısı 0 ise, yani her noktanın derecesi çift
ise, bu, Euler'in yukarıda kanıtladığımız teoremi.

Şimdi çizgede tek dereceli sadece iki nokta olduğu-
nu varsayalım. Bu noktalara A ve B diyelim. A ve
 B arasına yeni bir kenar ekleyelim (aralarında ke-
nar varsa da ekleyelim, anımsarsanız çizge tanımi-
mız bu yazıda daha geniş, iki nokta arasında bir-
den çok kenar olduğu çizgeleri de kabul ediyoruz.)
Elde ettiğimiz çizgeye H adını verelim. Elbette
 H 'nin her noktasının derecesi çifttir. Ayrıca H tek-
parçadır, çünkü G 'nin kendisi tekparça, bir kenar
eklemekle tekparçalık bozulmaz, tam tersine çizge
daha da tekparça olur! Demek ki, yukarıda kanıt-
ladığımız Euler'in teoremine göre H 'nin bir Euler
turu vardır. Bu Euler turuna istediğimiz kenardan
başlayabileceğimize dikkatinizi çekeriz. Tura,
 G 'ye eklediğimiz AB kenarıyla başlayalım. Tur
 AB diye başlayıp gene A 'da bitiyor. Bu Euler tu-
rundan en baştaki AB kenarını atarsak, G 'de her
kenardan sadece bir kez geçen (B 'de başlayıp A 'da
biten) bir yolculuk bulmuş oluruz. Bu teoremimiz
de kanıtlanmıştır. ♦

Ayrık Döngülerin Bileşimi Olan Çizgeler

Bir döngü, başladığı noktaya geri dönen ve
aynı noktadan iki kez geçmeyen bir yolculuktur.

Teorem. *Bir çizgenin kenarlarının, ortak ke-
narı olmayan döngülerin kenarlarının bileşimi ol-
ması için yeter ve gerek koşul, her noktanın dere-
cesinin çift olmasıdır.*



Kanıt: Döngülerin noktalarının derecesi 2 ol-
duğundan, koşul gereklidir. Şimdi koşulun yeter-
li olduğunu kanıtlayalım. Önce her noktasının
derecesi çift olan bir çizgede bir döngü bulalım.

Aynı noktadan iki kez geçmeyen en uzun yo-
lu alalım. Bu yol $A_0A_1...A_k$ olsun (A_i 'ler yolun
noktaları, geçildikleri sırayla dizilmişler, hiçbiri
bir diğerine eşit değil.) A_0 'ın derecesi çift oldu-
ğundan A_0 'a bağlı A_1 'den başka bir nokta daha
olmalı. Bu noktaya B diyelim. Şimdi $BA_0A_1...A_k$
yoluna bakalım. Bu yol, aynı noktadan geçmeyen
en uzun yoldan daha uzun, dolayısıyla aynı nok-
tadan iki kez geçmeli ve ikinci kez geçilen nokta
elbette B noktası olmalı. Diyelim $B = A_i, i > 1$.
Şimdi $BA_0A_1...A_i$ bir döngüdür.

Çizgede bir döngü bulduk. Bu döngünün ke-
narlarını çizgeden çıkarırsak daha az kenarlı ve
her noktasının derecesi yine çift olan bir çizge bu-
luruz. Yukarıda yaptığımızı bu çizgeyle yapalım.
İkinci bir döngü buluruz. Bu döngüyü de çıkarı-
lım çizgeden, ve böylece kenar kalmayana dek de-
vam edelim. Çizgemizin kenarları, bu teker teker
attığımız döngülerin kenarlarının bileşimidir. ♦