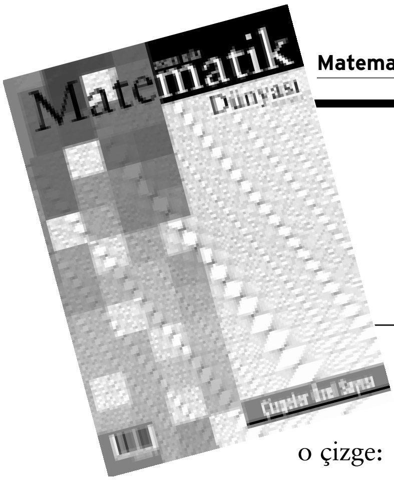
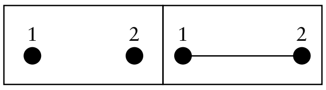


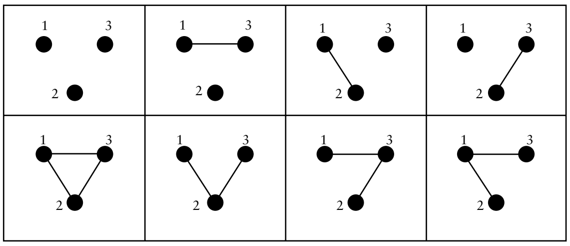
n Noktalı Çizge Sayısı

Bir Noktalı Çizgeler: Sadece bir tane var. İşte o çizge: 

İki Noktalı Çizgeler: İki noktalı iki çizge var. İşte:



Üç Noktalı Çizgeler: Üç noktalı sekiz çizge var. İşte:



***n* Noktalı Çizge Sayısı.** Genel olarak n noktalı çizge sayısını bulalım. Noktalarımızı 1, 2, ..., n diye adlandıralım. Herhangi iki nokta arasında bir kenar olup olmadığına karar vereceğiz.

$\{1, 2,\dots, n\}$ noktalar kümesinde

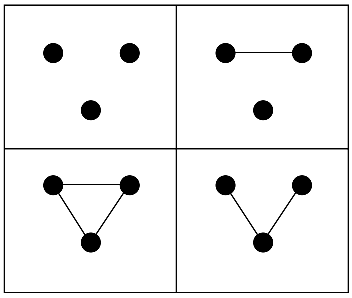
$$\binom{n}{2} = n(n-1)/2$$

tane nokta çifti vardır. Herbir nokta çifti için "kenar var" ya da "kenar yok" yargısını vereceğiz. Yani $n(n-1)/2$ tane "evet" ya da "hayır" kararı vereceğiz. Demek ki n noktalı toplam $2^{n(n-1)/2}$ tane çizge vardır.

Örneğin $n = 3$ ise, $2^{3(3-1)/2} = 2^3 = 8$ çizge vardır, yukarıda görüldüğü gibi…

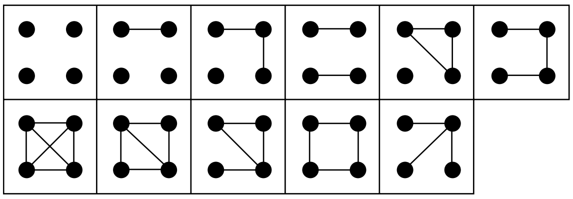
Eğer $n = 100$ ise, çizge sayısı $2^{100(100-1)/2} = 2^{4950}$'dir, yani 1491 haneli bir sayı…

Adsız Üç Noktalı Çizgeler. Yukarda teker teker herbirini çizdiğimiz üç noktalı 8 çizgeye geri dönelim. Eğer bu 8 çizgenin noktalarının adlarını silersek geriye sadece 4 çizge kalır:

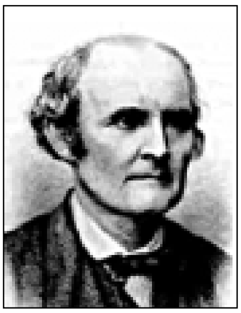


Noktaları adlandırılmış çizge sayısı (örneğimizde 8), noktaları adlandırılmamış çizge sayısından (örneğimizde 4) çok daha fazla (haliyle...)

Adsız Dört Noktalı Çizgeler. Şimdi $n = 4$ olsun. $\binom{4}{2} = 6$ olduğundan, noktaları adlandırılmış çizge sayısı $2^6 = 64$'dır. Hepsini çizmeyeceğiz, hatta hiçbirini çizmeyeceğiz, meraklısı varsa çizsin... Noktaların adlarını silelim… Çizge sayısı gene azalır, 11'e iner. İşte o 11 çizge:

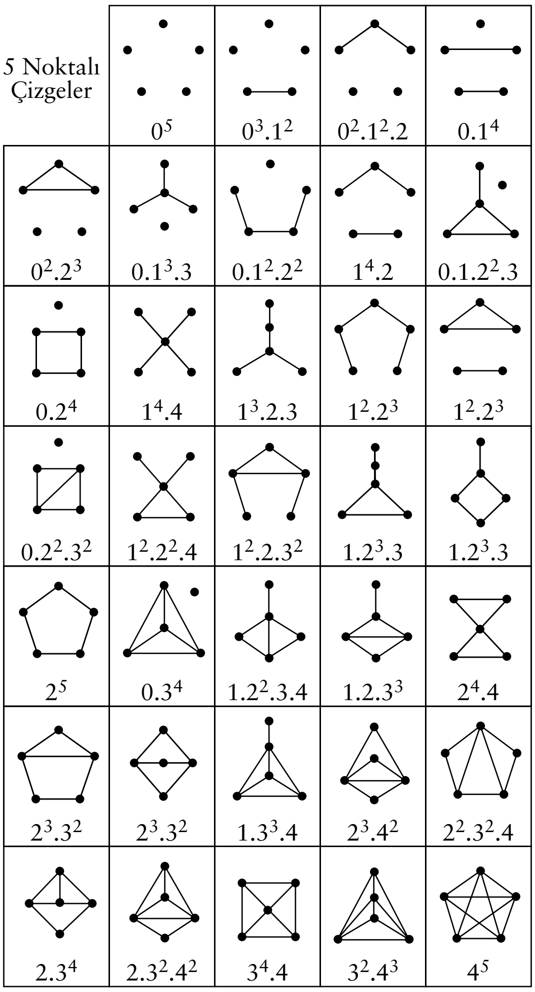


Noktaları adlandırılmamış çizge sayısını bulmak kolay değildir. Bu soru 1850'lerde ilk olarak Arthur Cayley tarafından sorulmuştur. Daha sonraları Cayley bu problemi belirli bir karbon atomuna sahip C_nH_{2n+2} alkanilerini sayma problemine uygulamıştır. (n tane C noktası, herbirinin derecesi 4 ve $2n + 2$ tane H noktası ve herbirinin derecesi 1. Bu koşulları sağlayan kaç çizge vardır?) Noktaları adlandırılmamış çizge sayısı **Pólya Sayılandırma Yöntemi** denilen bir yöntemle hesaplanabilir. Bu


Arthur Cayley

konuya **Noktasız Çizgeleri Saymak** yazımızda değineceğiz.

Adsız Beş Noktalı Çizgeler. Eğer $n = 5$ ise, adlandırılmamış noktalı 34 çizge vardır. İşte o 34 çizge [RW]:



Çizgenin altındaki $2^2.3^2.4$ gibi kodları açıklayalım. Örneğin $2^2.3^2.4$ kodu, 2 dereceli 2 nokta olduğunu[1], 3 dereceli 2 nokta olduğunu ve 4 dereceli 1 nokta olduğunu söylüyor. $2^2.3^2.4$ kodlu çizgede 1 dereceli nokta yok. Çizgeler bu kodlara göre sıralanmışlar. En başta 0^5, yani 00000 kodlu çizge, sonra $0^3 1^2$, yani 00011 kodlu çizge… En sonda da 4^5, yani 44444 kodlu çizge…

Aynı koddan birkaç değişik çizge olabilir, örneğin $1^2.2^3$ kodlu iki değişik çizge var.

Küçük nokta sayısı için durum şöyle:

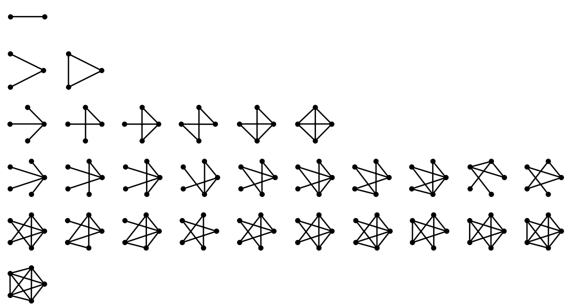
n	G_n = n adsız noktalı çizge sayısı
1	1
2	2
3	4
4	11
5	34
6	156
7	1044
8	12346
9	274668
10	12005168
11	1018997864
12	165091172592
13	50502031367952
14	29054155657235488
15	31426485969804308768
16	64001015704527557894928
17	245935864153532932683719776
18	1787577725145611700547878190848
19	24637809253125004524383007491432768
20	645490122795769841856164638490742749440
21	32220272899808983433502244253755283616097664
22	3070846483094144300637568517187105410586657814272
23	559924939699792080597976380819462179812276348458981632
24	195704906302078447922174862416726256004122075267063365754368
25	131331393569895519432161548405816890146389214706146483380458576384

Çeşitli kaynaklarda bulunan bu sayıların doğruluğunu kontrol etmedik!

Sayıların korkunç bir hızla arttığı belli.

Daha fazla bilgi, http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eisA.cgi?Anum=000088 ve http://mathworld.wolfram.com/SimpleGraph.html sitelerinde bulunabilir.

Tekparça Çizge Sayısı. Her iki nokta arasında en az bir yolun bulunduğu çizgelere **tekparça** çizge demiştik. n = 2, 3, 4, 5 için tekparça çizgeler aşağıda:



Tekparça çizge sayısı toplam çizge sayısından (yani G_n'den) daha azdır elbet, ama ne kadar daha azdır? n noktalı tekparça çizge sayısına T_n diyelim. Küçük n'ler için T_n sayısının değerini bir sonraki sayfadaki çizelgede bulacaksınız [RW].

1 Bir noktanın derecesi o noktaya değen kenar sayısıdır.

n	T_n = n adsız noktalı tekparça çizge sayısı
1	1
2	1
3	2
4	6
5	21
6	112
7	853
8	11117
9	261080
10	11716571
11	1006700565
12	164059830476
13	50335907869219
14	29003487462848061
15	31397381142761241960
16	63969560113225176176277
17	245871831682084026519528568
18	1787331725248899088890200576580
19	24636021429399867655322650759681644
20	645465483198722799426731128794502283004
21	32219627385046589818232044119082157323436797
22	3070814262175729723895568454399186829509550171755
23	559943868821088067965169467298102645124904676852569700
24	195704346352067869424144939394112759539046378875246729014803
25	131331197864429267343038461571121231901357546349778703374744110480

(Bknz. http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/graphs.html)[2]

Görüldüğü gibi T_n sayıları G_n'lerden çok çok küçük değil, hatta onlara oldukça yakın. T_n/G_n sayıları 1'e yakınsarlar, ve görüldüğü üzere oldukça çabuk yakınsarlar. Bir başka deyişle, rastgele sonlu bir çizge tekparçadır, yani n büyüdükçe, n noktalı bir çizgenin tekparça olma olasılığı artar. Bu konuya Sonlu Rastgele Çizgeler yazısında değineceğiz. O yazıda daha neler neler göreceğiz! Örneğin, n arttıkça, n noktalı rastgele bir çizgenin düzlemsel olma olasılığı düşer, 0'a yakınsar. Gene n arttıkça, bir noktadan herhangi bir başka noktaya tek bir noktadan geçerek ve kenarları takip ederek (yani iki adımda) gidebilirsiniz, çok büyük bir olasılıkla… Bir başka deyişle rastgele bir çizgenin çapı 2'dir.

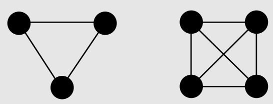
n	$\approx T_n/G_n$
1	1
2	0,5
3	0,5
4	0,545455
5	0,617647
6	0,717949
7	0,817050
8	0,900454
9	0,950529
10	0,975961
11	0,987932
12	0,993753
13	0,996710
14	0,998256
15	0,999074
16	0,999509
17	0,999740
18	0,999862

Bunlar, son yılların çok canlı araştırma konusu olan Rastgele Çizgeler Kuramına girer. Sonsuz rastgele çizgelerden geçen sayımızda Bir Tane Rastgele Çizge Var adlı yazımızda sözetmiştik. Bu sayıda bol bol sonlu rastgele çizgelerden sözedeceğiz. ♦

2 Bu sayılar [RW]'den alınmıştır. Ancak tekparça çizge sayısı toplam çizge sayısından daha fazla olamayacağından, [RW]'nin n = 23 için verdiği bu sayılarda bir hata olmalı.

İkiparça Tamçizgelerin Kenar Sayısı

n tane nokta alalım. Bu n noktayı iki kampa ayıralım. Bir kampta a, öbür kampta b nokta olsun. Demek ki $a + b = n$. Kamplara sırasıyla A ve B diyelim. A kampındaki noktaların hepsini birbirine bağlayalım. B kampındaki noktaların da hepsini birbirine bağlayalım. Ama A kampındaki hiçbir noktayı B kampındaki bir noktaya bağlamayalım. Böylece bir çizge elde ederiz, birbirinden ayrık iki parçadan oluşan bir çizge… Örneğin $n = 7$, $a = 3$, $b = 4$ için aşağıdaki çizgeyi elde ederiz:



A *B*

n verilmişse, hangi a ve b için bu çizgenin kenar sayısı maksimumdur ve hangi a ve b için bu çizgenin kenar sayısı minimumdur?

Benzer soruları üç değişik kampa ayrılmış noktalar için yanıtlamaya çalışın. ♦

Adlandırılmış n noktalı $2^{n(n-1)/2}$ tane çizge olduğunu gördük. Peki, n noktalı ve m kenarlı kaç çizge vardır? Olası kenar sayımız $n(n - 1)/2$. Bu olası $n(n - 1)/2$ kenardan m tanesini seçmemiz gerekiyor. Demek ki n noktalı m kenarlı çizge sayısı

$$\binom{n(n-1)/2}{m}$$

dir. ♦

Bir Oyun

İki kişi bir G çizgesi üzerinde oyun oynuyorlar. Oyunun kuralı şöyle: Birinci oyuncu bir a noktasını seçer. İkinci oyuncu a noktasına bitişik bir b noktası seçer, ab yolu oluşturur. Tekrar birinci oyuncuya sıra gelir, b noktasına bitişik bir c noktası seçerek abc yolu oluşturur. *Yol* oluşturacak nokta seçebilen son oyuncu oyunu kazanır. Daha önce seçilmiş bir yolu seçmek yasak.

a. G çizgesi mükemmel eşlemesi olan (bknz. sayfa 21) bir çizge olsun. Bu durumda ikinci oyuncu oyunu kazanmak için hangi stratejiyi izlemelidir?

b. G çizgesinin mükemmel eşlemesi olmasın. Birinci oyuncu kazanmak için hangi stratejiyi izlemelidir? ♦