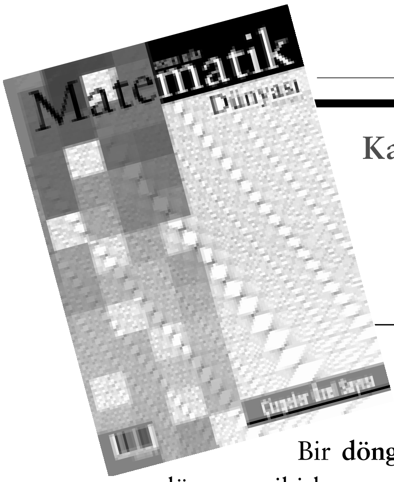
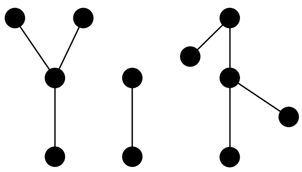


Kapak Konusu: Çizgeler

Ağaç ve Orman

"Döngü"sü olmayan çizgelere **orman** denir. Bir **döngü**, başladığı noktaya geri dönen ve iki kez aynı noktadan geçmeyen bir yolculuktur. **Ağaç** ise tekparça bir ormandır; yani ağaç, döngü barındırmayan tekparça çizgedir. Tahmin edileceği üzere, ormanlar ağaçlardan (en az bir ağaçtan) oluşur. Örneğin aşağıdaki çizge üç ağaçtan oluşmuş bir ormandır.



Ağaçlar, en basit, en yalın, en sade çizgelerdir diyebiliriz. Kolay kanıtlanan ilginç özellikleri de vardır. Örneğin, bir ağacın herhangi iki noktası birbirine tek ve tek bir yolla bağlıdır. Ağacın iki noktası iki değişik yolla bağlanmış olsa, bu iki yoldan kolaylıkla bir döngü elde edilebilir.

Çizge kuramında bir soruyu önce ağaçlar için yanıtlamak başlangıç noktası olarak kabul edilir; amaç daha sonra o soruyu genel olarak çizgeler için kanıtlamaktır. Bu nedenle ağaçlar için doğru olduğu gösterilmiş ama ağaç olmayan bir çizge için doğru olup olmadığı bilinmeyen birçok sanı vardır.

n noktalı bir ağacın kenar sayısını bulalım. Yukarıdaki ormanın ağaçlarını soldan sağa T_1, T_2, T_3 diye adlandırırsak,

T_1'in nokta sayısı = 4, T_1'in kenar sayısı = 3
T_2'nin nokta sayısı = 2, T_2'nin kenar sayısı = 1
T_3'ün nokta sayısı = 5, T_3'ün kenar sayısı = 4

eşitliklerini farkederiz. n noktalı bir ağacın n–1 kenarı olması gerektiğini tahmin etmişsinizdir:

Teorem 1. *n noktalı bir ağacın n–1 kenarı vardır.*

Kanıt: Kanıtımızı nokta sayısı üzerine tümevarımla yapacağız.

$n = 1$ ise, ağacımız tek noktalı kenarsız bir çizge olmak zorunda olduğundan teoremimiz bu şık için doğrudur.

Şimdi $n > 1$ olsun ve $0 < r < n$ ise, her r noktalı ağacın $r - 1$ kenarı olduğunu varsayalım (tümevarım varsayımı). n noktalı bir T ağacını ele alalım. T'nin bir kenarını silelim (ama kenarın uç noktalarını silmeyelim.) Böylece T'den daha az kenarlı ve iki ağaçtan oluşmuş bir orman elde ederiz. Bu iki ağacın nokta sayılarına n_1 ve n_2 diyelim. Elbette $n_1 + n_2 = n$'dir. Tümevarım varsayımından dolayı bu iki küçük ağaçta $n_1 - 1$ ve $n_2 - 1$ kenar vardır. Dolayısıyla T ağacında $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$ tane kenar vardır. □

Bir ağaçtan derecesi 1 olan noktaları ve o noktalara değen kenarları atalım. Geriye gene bir ağaç kalır. Bu ağaçtan da derecesi 1 olan noktaları ve o noktalara değen kenarları atalım. Bu işleme böyle devam edelim. Geriye ya bir nokta kalır ya da hiç kalmaz. Eğer geriye bir nokta kalırsa, geriye kalan o noktaya **ağacın merkezi** denir.

Başladığımız ağaca T_0, daha sonra elde ettiğimiz ağaçlara sırasıyla T_1, T_2, ... dersek, T_0'ın her eşyapı dönüşümü (geçen sayıda tanımlandı bu kavram) T_i ağaçlarını gene kendine götürmek zorundadır.

Bir Sonuç. *En az n kenarlı n noktalı bir çizgede bir döngü vardır.* □

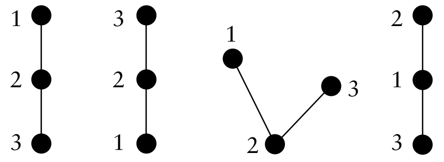
Bir Başka Sonuç. *n noktalı bir çizgenin en az n kenarı varsa o zaman o çizgede mutlaka bir döngü vardır.* □

Ağaçlarla ilgili diğer bir özellik de şudur:

Teorem 2. *En az iki noktalı sonlu bir ağaçta derecesi 1 olan en az iki nokta vardır.*

Kanıt: Ağacımıza T adını verelim. T ağacındaki en uzun yolu ele alalım. Bu yol A'da başlayıp B'de bitsin. Bu yol en uzun yol olduğundan A ve B noktalarının dereceleri 1 olmak zorundadır. □

Bunlar kolay sonuçlardı. Şimdi daha zor bir sonucu kanıtlayacağız, ağaçları sayacağız. Cayley'e ithaf edilen bir problem olan noktaları adlandırılmış ağaç sayısını bulacağız. İlk yazıda noktaları adlandırılmış çizgelerden söz etmiştik. Okurun hafızasını tazelemek açısından bir örnek verelim: Aşağıdaki adlandırılmış ağaçların ilk üçü aynı adlandırılmış ağaçtır, dördüncüsü ilk üçünden değişiktir.



Noktalar adlandırılmamış olsaydı dördünün de birbirinden farkı kalmayacaktı.

Teorem (Cayley, 1889). *n noktalı n^{n-2} tane noktaları adlandırılmış ağaç vardır.*

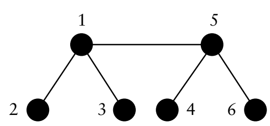
Şimdiye kadar gördüğümüz teoremlerin kanıtları oldukça kolaydı. Bu teoremin kanıtı hiç de kolay değildir. Prüfer ve Clarke'ın buldukları kanıtı açıklayacağız.

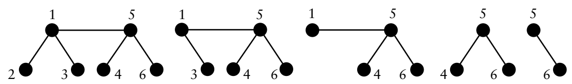
$n = 2$ için sonuç belli: 2 noktalı tek bir ağaç vardır. Bundan böyle $n \geq 3$ eşitsizliğini varsayalım.

Noktaları adlandırılmış n noktalı her ağaç için, terimleri $\{1, 2, ..., n\}$ kümesinden olan bir $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ dizisi bulacağız. Yöntemimiz, noktaları adlandırılmış n noktalı ağaçlarla, terimleri $\{1, 2, ..., n\}$ kümesinden olan $n - 2$ uzunluğundaki diziler arasında bir eşleme verecek. Bu biçimde yazılmış n^{n-2} adet dizi olduğundan sonucu elde etmiş olacağız.

Önce noktaları adlandırılmış her T ağacına karşılık gelen $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ biçimindeki diziyi nasıl elde edeceğimizi açıklayalım. Nokta adlarının 1, 2, ..., n olduğunu varsayalım. b_1, derecesi 1 olan (bknz. Teorem 2) adı en küçük nokta olsun. a_1 de b_1'in bitişik olduğu tek nokta olsun. Dizimizin ilk terimine a_1 yazıp, b_1 noktasını ve ona bitişik kenarı silip $n - 1$ noktalı yeni ağaca bakalım ve aynı işlemi bu yeni ağaca uygulayalım. Bu işlemi sadece iki nokta kalana kadar uygularsak aradığımız $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ dizisini elde ederiz. Bu yöntemle elde edilmiş dizi, T ağacının **Prüfer dizisi** diye adlandırılmıştır.

Örnek: Yandaki ağaç için sırasıyla 12, 13, 51 ve 54 kenarlarını silip

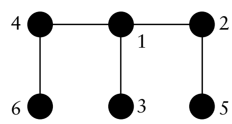




ağaçlarını elde ederiz. T ağacının eşleştiği dizi (1, 1, 5, 5) dizisidir.

Şimdi terimleri $\{1, 2, ..., n\}$ olan herhangi bir $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ dizisinin hangi ağaca karşılık geldiğini bulalım. b_1 bu dizide görünmeyen en küçük nokta olsun. a_1 ve b_1 noktaları arasına bir kenar koyalım. Ardından diziden a_1'i kaldırıp $n - 3$ terimli yeni diziye bakalım ve b_1'i yok sayıp yöntemimizi yeni diziye uygulayalım. Bu şekilde adım adım ağacın kenarlarını belirleyebiliriz. Son adımda ise hâlâ daha kullanabileceğimiz atılmamış son iki nokta arasına kenar koyarak ağacımızı tamamlarız.

Örnek: (1, 2, 1, 4) dizisine bu yöntemi uygulayarak eşleştiği T ağacını bulalım. Dizimiz dört terimli olduğuna göre noktalar kümesi {1, 2, 3, 4, 5, 6} olacak. Dizinin ilk noktası 1, görünmeyen en küçük noktası 3'tür. Dolayısıyla 13 çizeceğimiz ilk kenar. Yeni dizimiz (2, 1, 4). Bu sefer 3'ü dikkate almayacağız, yani noktalar kümemizin {1, 2, 4, 5, 6} olduğunu varsayacağız. Yeni dizimizin ilk terimi 2, dizide görünmeyen en küçük nokta da 5. Demek ki 25 de bir kenar. 2'yi dizimizden silip geri kalan (1, 4) dizisini ele alalım. 3 ve 5 noktalarını artık kullanmayacağız. 1 dizinin ilk terimi, 2 ise dizide görünmeyen en küçük nokta, dolayısıyla 12 diğer bir kenar olacak. Artık 2, 3 ve 5 noktalarını kullanmayacağız. Son dizi (4) dizisi, dizide görünmeyen en küçük nokta 1, demek ki 14 diğer bir kenar olacak. 1 de kullanmayacağımız noktalar arasına eklendi. Son adımda, kullanabileceğimiz kalan iki nokta arasına bir kenar koyacağız, yani 46 da bir kenar. Demek ki (1, 2, 1, 4) dizisi



ağacıyla eşleşir. İlk yöntemi uygulayarak bu ağacın eşleştiği dizinin (1, 2, 1, 4) olduğunu kontrol edebilirsiniz.

Bu iki yöntem noktaları adlandırılmış n noktalı ağaçlarla, terimleri $\{1, 2, ..., n\}$ kümesinden olan $n-2$ uzunluğundaki diziler arasında eşleme vermektedir. Demek ki noktaları adlandırılmış n noktalı ağaç sayısı n^{n-2}'dir. ♦