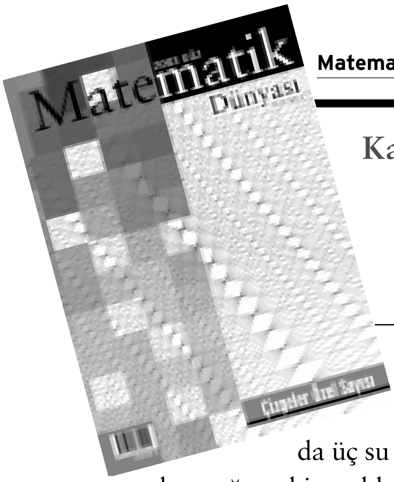
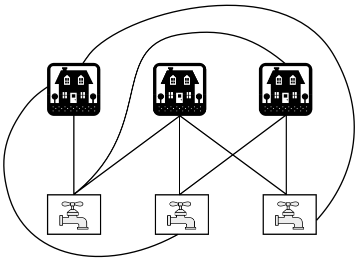


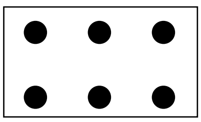

Kapak Konusu: Çizgeler

# Düzlemsel Çizgeler

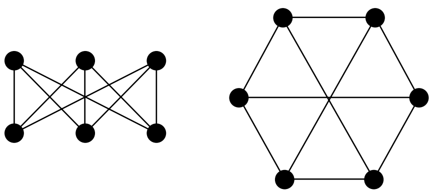
Üç evde yaşayan üç aile varmış, evlerin dışında da üç su kaynağı... Üç aile de üç su kaynağına bir yoldan bağlanmak istiyor, ancak, kavgalı olduklarından yolların kesişmesini istemiyorlar. Nasıl yaparlar?



Bilinen bir sorudur bu. Aynı soruyu çizgeler kuramında ifade edebiliriz: Alttaki çizgede, tepedeki üç noktanın herbirini alttaki üç noktanın herbirine çizgiler birbirleriyle kesişmeyecek biçimde bağlayabilir miyiz?



Bir başka deyişle aşağıda resimleri gösterilen $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel midir? Yani bu çizge kenarlar kesişmeyecek biçimde bir düzleme çizilebilir mi?



$K_{3,3}$ çizgesinin iki değişik gösterimi

Yanıt olumsuzdur: $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel değildir, yani üç ev üç su kaynağına borular birbirinin üstünden geçmeden bağlanamaz.

Bunu bir önceki Euler Formülü yazısında kanıtlamıştık. $K_{3,3}$ çizgesinin düzlemsel olmayışı aşağıdaki teoremden de çıkar:

**Teorem.** *En az $n \geq 3$ noktalı bir çizgede en küçük döngünün uzunluğu $g \geq 3$ ise, o zaman çizgenin kenar sayısı ya $n-1$'den ya da*

$$\frac{g}{g-2}(n-2)$$

*den küçüktür.*

Bu teoremin kanıtı o kadar zor değildir, örneğin [$B_1$, Teorem 16, sayfa 22]'de bulunabilir.

**Sonuç.** $K_{3,3}$ *çizgesi düzlemsel değildir.*

**Kanıt:** $K_{3,3}$ çizgesinde $g = 4$, $n = 6$ ve kenar sayısı $k = 9$.

Ama $9 > n - 1 = 6 - 1$ ve $9 > \frac{4}{4-2}(6-2)$.

Demek ki yukardaki teoreme göre $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel olamaz. □

**Sonuç.** $K_5$ *çizgesi düzlemsel değildir.*

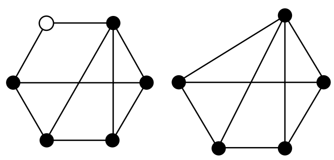
**Kanıt:** $K_5$ çizgesinde $g = 3$, $n = 5$ ve kenar sayısı $k = 10$.

Ama $10 > 5 - 1$ ve $10 > \frac{3}{3-2}(5-2)$.

Demek ki yukardaki teoreme göre $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel olamaz. □

Yukardaki sonuçlara göre $K_{3,3}$ ve $K_5$ çizgelerini içeren çizgeler düzlemsel olamazlar. 1930'da Kuratowski bunun aşağı yukarı tersini de kanıtladı. Kuratowski'nin teoremini açıklayalım.

Bir çizge alalım. Çizgeye $G$ diyelim. Eğer çizgede derecesi 2 olan bir nokta varsa, o noktayı silelim ve o noktaya değen iki kenarı onarıp tek bir kenar yapalım. Örneğin, eğer $G$, yandaki ilk çizgeyse, (içi boş gösterilmiş) derecesi 2 olan noktayı atıp, o noktaya değen iki kenarı tek bir kenar haline getirip sağdaki çizgeyi elde ederiz.



Bunu derecesi 2 olan kenar kalmayana dek yapalım. Hatta, derecesi 0 ve 1 olan noktaları ve o noktalara değen kenarları da atalım. Ve bunu böylece sürdürelim. Geriye (belki de hiç noktasız) her noktasının derecesi en az 3 olan bir çizge kalacak. Eğer $K_{3,3}$ ve $K_5$ çizgeleri geriye kalan bu çizgenin bir altçizgesi değilse, o zaman $G$ çizgesi düzlemseldir. İşte Kuratowski Teoremi bunu söyler. Çok hoş bir teorem. Kanıtı [K, DS, Th, Tv]'de bulunabilir. ♦