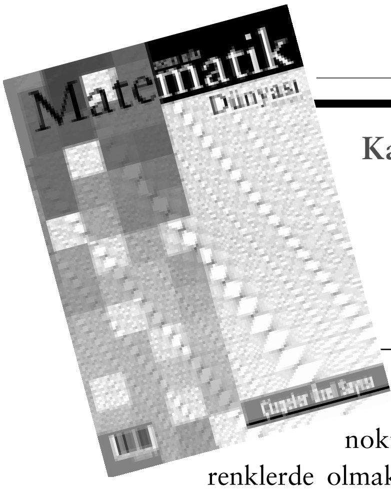


Kapak Konusu: Çizgeler

Çizgeleri Boyamak ve Dört Renk Problemi

Sonlu bir çizgeyi ortak noktaları olan kenarlar ayrı renklerde olmak koşuluyla çeşitli renklere boyamak istiyoruz.

Elimizde bol bol renk varsa, örneğin renk sayımız en az çizgenin kenar sayısı kadarsa, o zaman böyle bir boyama her zaman mümkündür, her kenarı ayrı bir renge boyarız, olur biter.

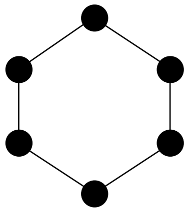
Öte yandan, elimizde sadece tek bir renk varsa, böyle bir boyama ancak her noktasının derecesi 1 olan çizgeler için mümkündür.

Amacımız, böyle bir boyama için yeterli en az renk sayısını bulmak. Bu sayıya çizgenin **kenar renk sayısı** diyelim. G çizgesinin kenar renk sayısı $\chi'(G)$ ile gösterilir.

$\chi'(G)$, G'nin noktalarının derecelerinin en büyüğünden daha az olamaz, bu bariz. Yani, eğer G çizgesinin nokta derecelerinin en büyüğüne $\Delta(G)$ dersek, $\Delta(G) \leq \chi'(G)$ eşitsizliği doğrudur. İkinci örnekte göreceğimiz üzere eşitlik doğru olmayabilir. (Ama çok da yanlış olmadığını göreceğiz birazdan.)

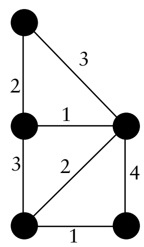
> n noktadan oluşan ve her iki noktası arasında bir kenar olan, yani $n(n-1)/2$ kenarlı çizgelere **tamçizge** denir. Tamçizgeler K_n ile gösterilir.

Örnek 1. $\Delta(G) = 1$ ise, o zaman $\chi'(G) = 1 = \Delta(G)$; bunu kanıtlamak oldukça kolay.



Örnek 2. n nokta ve n kenarlı bir döngüden ibaret olan çizgeler C_n olarak gösterilir. Yanda C_6'yı görüyorsunuz. $\chi'(C_n)$ sayısını bulmak oldukça kolay: n çiftse $\chi'(C_n) = 2 = \Delta(C_n)$, tekse $\chi'(C_n) = 3 = \Delta(C_n)+1$.

Örnek 3. Yandaki çizgenin kenar renk sayısı 4'tür. Renkleri 1, 2, 3 ve 4 ile ifade edip kenarları şekildeki gibi bu 4 renge boyayabiliriz.



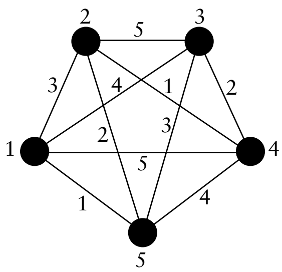
Bu boyama bu G çizgesi için $\chi'(G) \leq 4 = \Delta(G)$ eşitsizliğini kanıtlıyor. Ama bu çizge daha az sayıda renkle de boyanamaz, çünkü derecesi 4 olan bir nokta var, yani $4 = \Delta(G) \leq \chi'(G)$. Demek ki bu örnekte $\chi'(G) = 4$.

Yukardaki örneklerde $\chi'(G) = \Delta(G)$ ya da $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ eşitliklerinden biri sağlanıyordu. Vizing Teoremi olarak bilinen ve kanıtlamayacağımız aşağıdaki sonuç bunun her zaman böyle olduğunu söylüyor.

Teorem (V.G. Vizing 1964, bknz. [We]).
$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1.$$

Hangi çizgelerin kenar renk sayısının Δ hangilerinin $\Delta+1$ olduğunu anlamak her zaman kolay değildir. Ancak özel bazı çizgeler için bu sayı bulunmuştur. Örneğin, olası her kenarın olduğu n noktalı K_n tamçizgeleri için bu sayı bilinmektedir:

Teorem: *n tek ise $\chi'(K_n) = n = \Delta(K_n)+1$, n çift ise $\chi'(K_n) = n-1 = \Delta(K_n)$'dir.*



Kanıt: Önce K_n tamçizgesinin kenarlarını n renge boyayabileceğimizi kanıtlayalım.

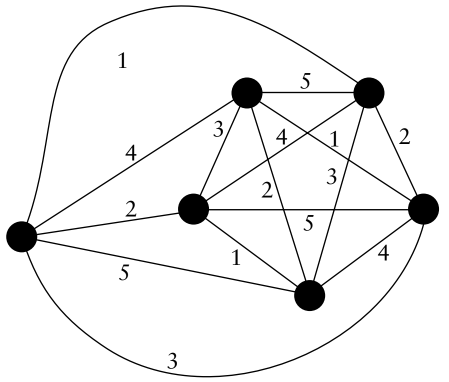
Noktaları her zamanki gibi 1, 2, ..., n diye adlandıralım. Renklerimize de 1, 2, ..., n diyelim. ab kenarını alalım. $a + b \equiv i (\mathrm{mod}\ n)$ eşitliğini sağlayan bir i rengi bulalım. Şimdi ab kenarını i rengine boyayalım. Böylece K_n çizgesi n farklı renkle boyanmış olur. Kolayca görüldüğü üzere, bu yöntemle, a noktasına $2a$'ya tekabül eden renge boyanmış bir kenar değmez, bu bilgiyi daha sonra kullanacağız.

Şimdi, eğer n tekse K_n'yi daha az boyayla boyayamayacağımızı, eğer n çiftse K_n'yi $n-1$ boyayla boyayabileceğimizi gösterelim.

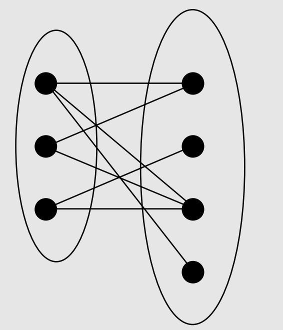
Önce n'nin tek olduğu durumu ele alalım. Aynı renkte k kenar olduğunu varsayalım. Ortak noktaları olamayacağından, bu k kenarın toplam $2k$ uç noktası vardır. Demek ki $2k \leq n$, yani $k \leq n/2$, yani (n tek sayı olduğundan) $k \leq (n–1)/2$. Demek ki her bir renkle en fazla $(n–1)/2$ kenar boyanabilir. Dolayısıyla en fazla $n–1$ renkle en fazla $(n–1)(n–1)/2$ kenar boyanabilir. Oysa K_n'nin daha fazla, tam $n(n–1)/2$ kenarı vardır ve boyanmamış kenar kalacaktır. Demek ki n tekse, K_n çizgesi n'den daha az renge boyanamaz.

Şimdi de n'nin çift olduğu durumu ele alalım. K_n tamçizgesini $n–1$ renge boyayacağız.

K_n tamçizgesi, {1, 2, ..., $n–1$} noktalarından oluşmuş $K_{n–1}$ tamçizgesine bir nokta (n noktası) ekleyerek ve o noktadan diğer bütün noktalara birer kenar ekleyerek elde edilir.



$K_{n–1}$ çizgesinin kenarlarını bir önceki yöntemle $n–1$ renge boyayalım. Her noktada bir eksik renk olacaktır: i noktasına değen $2i$'ye tekabül eden renge boyanmış kenar yoktur. Noktalara değmeyen renklerin hepsi birbirinden farklıdır ($n–1$ tek sayı olduğundan $2a \equiv 2b \mod(n–1)$ ise $a = b$'dir.) Bu eksik renklerle eklenen noktanın kenarlarını boyadığımızda K_n çizgesini $n–1$ renkle boyama işlemimiz tamamlanmış olur. Demek ki $\chi'(K_n) \leq n–1 = \Delta(K_n) \leq \chi'(K_n)$, yani $\chi'(K_n) = n–1$. □



iki kümeli bir çizge örneği

Şimdi benzer bir sonucu iki kümeli çizgeler için kanıtlayacağız. Önce iki kümeli çizgeyi tanımlayalım. Eğer bir çizgenin noktaları, aynı kümedeki noktalar arasında kenar olmayacak biçimde ikiye ayrılabilirse, o çizgeye **iki kümeli çizge** denir.

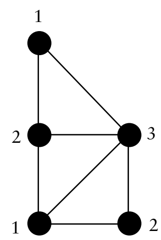
Teorem (König, 1916). *İki kümeli bir G çizgesinin kenar renk sayısı* $\Delta(G)$*'dır*[1].

Kanıt: Kanıtımız König'in orijinal kanıtından farklı olacak ve bu sayımızda açıkladığımız başka bir sonuca dayanacak.

G çizgesine yeni nokta ve kenarlar ekleyerek, her noktasının derecesi $\Delta(G)$ olan ve G çizgesini içinde barındıran iki kümeli G_1 çizgesini elde edelim. Örneğin G_1 çizgesi belli bir n için $K_{n,n}$ çizgesi olabilir. Noktalarının derecesi eşit olan iki kümeli çizgelerin mükemmel eşlemesi olduğunu Çöpçatanlık Problemi yazımızda gösterdik (o yazının sonundaki "Bir Başka Sonuç" paragrafı). G_1 çizgesinin mükemmel eşlemesinin kenarlarını 1 rengine boyayalım ve boyadığımız bu kenarları G_1 çizgesinden silelim. Yeni oluşan çizgeye G_2 adını verirsek, G_2 çizgesi de noktalarının derecesi $\Delta(G) - 1$ olan iki kümeli çizgedir ve mükemmel bir eşlemesi vardır. G_2 çizgesindeki mükemmel eşlemeyi 2 rengine boyayıp G_2 çizgesinden 2 rengine boyadığımız bu kenarları silelim. Oluşan yeni çizge, noktalarının derecesi $\Delta(G) - 2$ olan iki kümeli çizgedir ve mükemmel bir eşlemesi vardır. Bu yöntemi tüm kenarları boyamayı bitirene dek sürdürürsek G_1 çizgesini dolayısıyla G çizgesini $\Delta(G)$ renkle boyamış oluruz. □

Noktaları Boyamak

Benzer bir boyamayı kenarlar yerine noktalar için de tanımlamak mümkün. G yine bir çizge olsun. G'nin noktalarını boyayacağız, ama komşu noktaların aynı renge boyanmamış olmasına özen göstereceğiz.



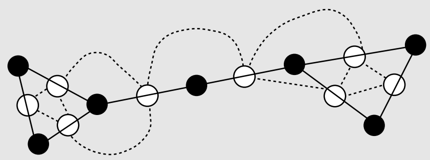
Noktaları, komşu noktalar ayrı renklerde olacak biçimde boyamak için gereken en az renk sayısına **nokta renk sayısı** diyelim. Nokta renk sayısı $\chi(G)$ ile gösterilir. Yukarıdaki çizgenin nokta renk sayısı 3'tür.

Önce nokta renk sayısıyla ilgili bariz bazı sonuçları sıralayalım.

(1) $\chi(G) = 1$ eşitliği için gerek ve yeter koşul G'nin kenarsız bir çizge olmasıdır.

1 Bu yazıdaki çizgelerimizin noktaları arasında birden fazla kenar olabilir, yani kavram ve kanıtlarımız daha genel çizgeler için de geçerlidir.

Herhangi bir G çizgesi ele alalım. Bu G çizgesinden hareket ederek bir G_1 çizgesi elde edeceğiz. G_1 çizgesinin noktaları G çizgesinin kenarları olacak. Şimdi G_1 çizgesinin iki noktasının ne zaman bir kenarla birleştirileceğine karar vermemiz gerekiyor. Eğer G_1 çizgesinin iki noktasına tekabül eden G'nin kenarları kesişiyolrlarsa G_1 çizgesinin o iki noktasını bir kenarla birleştirelim. Örneğin, eğer G aşağıdaki koyu noktalı ve düz kenarlı çizgeyse, G_1 içi beyaz noktalı ve kesik kenarlı çizgedir.



(2) $\chi(G) = 2$ eşitliği içi gerek ve yeter koşul G'nin iki kümeli bir çizge olmasıdır. Dolayısıyla bir ağacın noktaları her zaman iki renge boyanabilir.

(3) $\chi(C_{2n+1}) = 3 = \Delta(C_{2n+1}) + 1$ ve $\chi(C_{2n}) = 2 = \Delta(C_{2n})$.

(4) $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$.

Brook'un 1941'de kanıtladığı aşağıdaki sonuç nokta renk sayısı için üstsınır vermektedir.

Teorem (Brook 1941, bknz [We]). *G tekparçaysa ve K_n ya da C_{2n+1} değilse $\chi(G) \leq \Delta(G)$'dir.*

Bu teoreme göre, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ eşitsizliği geçerlidir ve üstsınır $G = K_n$ ve $G = C_{2n+1}$ durumlarında elde edilir.

Dört Renk Problemi

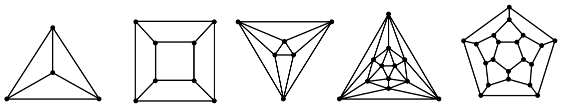
Siyasi haritalarda komşu ülkeler farklı renklerle boyanır. Her türlü siyasi haritayı bu biçimde boyamak için gerekli en az renk sayısı kaçtır? Dört Renk Problemi, her haritanın, komşu iki ülke aynı renkte olmayacak biçimde sadece dört renkle boyanıp boyanamayacağı problemidir.

İki ülkenin komşu olması için iki ülkenin sınırlarının bir çizgide kesişmesi gerekmektedir, ülkelerin sınırları sadece sonlu sayıda noktada kesişiyorsa o zaman ülkeler komşu sayılmazlar.

1852'de henüz öğrenci olan, ileride matematikçi olacak Francis Guthrie kardeşi Frederick Guthrie'ye dört rengin yeterli olacağını düşündüğünü söylemiş, Frederick de danışmanı İngiliz matematikçi A. de Morgan'a sormuştur. Sorunun yanıtını De Morgan da bilmiyordur. 1878'de A. Cayley problemi Londra Matematik Derneği'ne sunmuştur. Bir yıldan kısa bir süre içinde A. B. Kenpe bu sanıyı kanıtladığını düşünmüş ancak 1890'da P. J. Heawood bu kanıtta yanlış olduğunu farketmiştir. Bir başka yanlış kanıt 1880'de Tait tarafından verilmiştir, kanıttaki boşluk 1891'de Petersen tarafından keşfedilmiştir. Her ne kadar kanıtlar yanlışsa da, her iki yanlış kanıtın da probleme katkısı olmuştur. Ardından önemli bir katkı 1922'de Franklin ve Birnhoff tarafından gelmiş en fazla 25 ülkeli bir haritayı boyamak için dört rengin yeterli olduğunu kanıtlamışlardır. Problem üzerine çalışmalar devam etmiş ve sanı nihayet 1976'da K. Appel ve W. Haken tarafından kanıtlanmıştır. Bu kanıt bilgisayar programı kullandığından, matematikçiler hâlâ daha bu teoremin daha basit bir kanıtını vermeye çalışıyorlar. En son N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour ve R. Thomas dört renk problemine yeni bir kanıt vermişlerdir. Bilgisayar da kullanan bu kanıt üzerine daha fazla bilgi http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html sitesinde bulunabilir.

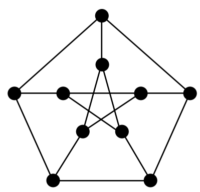
Sorular

Soru 1. Beş Platon cisminin çizgelerinin (aşağıda) kenar ve nokta renk sayılarını bulun.



$\Delta(G)=3$ $\Delta(G)=3$ $\Delta(G)=4$ $\Delta(G)=5$ $\Delta(G)=3$

Soru 2. Yandaki Petersen çizgesinin kenar ve nokta renk sayıları kaçtır?



Soru 3. Türkiye'nin siyasi haritasını dört renge boyayabilir misiniz? ♦