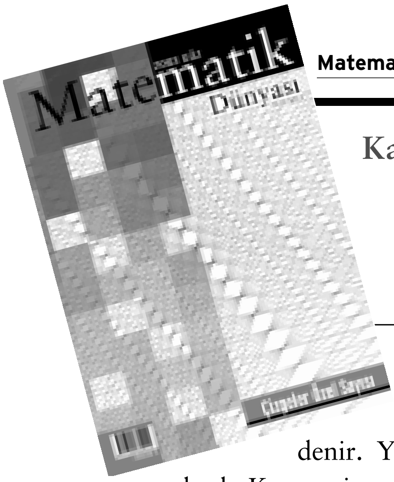
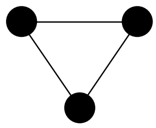


Kapak Konusu: Çizgeler

Büyük Çizgeler Küçük Çizgeleri Yutar

Bir çizgede birbirine komşu üç noktaya **üçgen** denir. Yani üçgen, aslında K_3 tamçizgesidir.



üçgen

Bir çizgede mutlaka bir üçgen olması için o çizgede en az kaç kenar olmalıdır? Yanıtlayacağımız birinci soru bu olacak. Yanıtlayacağımız ikinci soru da şu olacak: Rastgele seçilmiş sonlu bir çizgede bir üçgen olma olasılığı kaçtır?

I. "En Az Kaç Kenar Olmalı?" Sorusu

Çizgede hiç kenar yoksa üçgen de olamaz elbet. Ama bir kenar da yetmez, en az üç kenar olmalı ki bir üçgen olma olasılığı olsun. Öte yandan nokta sayısı üçten fazlaysa, üç kenar da yetmez, hatta dört kenar da yetmez. Örneğin dört noktalı bir çizgede en az beş kenar olmalı ki o çizgede bir üçgen olduğundan emin olalım. Beş noktalı bir çizgede en az altı kenar olmalı ki o çizgede bir üçgen olduğundan emin olalım.

Eğer çizgede olası tüm kenarlar varsa, yani K_n tamçizgesiyle karşı karşıyaysak, çizgede mutlaka bir üçgen olacaktır, hatta bir değil $\binom{n}{3}$ tane üçgen olacaktır. Ama biz, tek bir üçgenin belirmesi için gereken en az kenar sayısıyla ilgileniyoruz.

Teorem (Mantel 1907). $[n^2/4]$'*den fazla kenarı olan n noktalı bir çizgede mutlaka bir üçgen vardır*[1].

Kanıt: G üçgensiz bir çizge olsun. n, G'nin nokta sayısı, e de G'nin kenar sayısı olsun. $e \le n^2/4$ eşitsizliğini göstereceğiz.

Eğer x ve y noktaları arasında bir kenar varsa, bu iki noktanın komşu olduğu ortak nokta olamaz. Dolayısıyla x ve y'nin derecelerinin toplamı en fazla n olabilir, yani $d(x) + d(y) \le n$ eşitsizliği doğrudur. Şimdi bu eşitsizlikleri toplayalım.

$$\sum_{xy \text{ kenar}} [d(x)+d(y)] \le ne$$

eşitsizliğini buluruz. Sol taraftaki toplama dikkatlice bakalım. Bu toplamı altalta yazalım ve kaç tane $d(x)$ topladığımıza bakalım, x'e değen ne kadar kenar varsa o kadar $d(x)$ toplarız. Yani, sol taraftaki toplamda, her $d(x)$, x noktasını içeren kenar sayısı kadar, yani x'in derecesi kadar beliriyor. Demek ki sol taraf, $\sum_{x \text{ nokta}} d(x)^2$'ye eşit. Cauchy'nin Bir Eşitsizliği yazısında kanıtladığımız üzere (sf. 69),

$$\left(\sum_{x \text{ nokta}} d(x)\right)^2 \le n \sum_{x \text{ nokta}} d(x)^2.$$

Dolayısıyla,

$$\left(\sum_{x \text{ nokta}} d(x)\right)^2 \le n \sum_{x \text{ nokta}} d(x)^2$$
$$= n \sum_{xy \text{ kenar}} [d(x)+d(y)] \le n^2 e.$$

Öte yandan

$$\left(\sum_{x \text{ nokta}} d(x)\right)^2 = (2e)^2 = 4e^2$$

eşitliğini sayfa 25'te görmüştük (El Sıkışma Teoremi). Demek ki $4e^2 \le n^2 e$, yani $e \le n^2/4$. □

II. Rastgele Bir Çizgede Üçgen Olma Olasılığı

Şimdi n noktalı rastgele seçilmiş bir çizgede üçgen olma olasılığını hesaplayalım. Herhangi iki nokta arasında bir kenar olma olasılığı p olsun. Demek ki p, 0'la 1 arasında bir sayı. Eğer kenarın olup olmaması için (hilesiz bir parayla) yazı tura atarsak $p = 1/2$ olur.

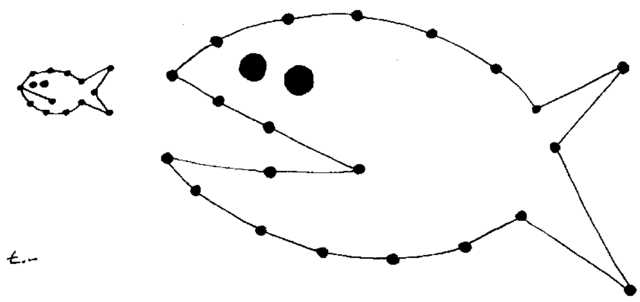
Noktalarımıza $\{1, 2, \ldots, n\}$ diyelim. Bu n noktayı üçer üçer ayıralım: $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$, … En sonda bir ya da iki nokta kalabilir, bu son iki noktayı umursamayalım. Toplam, $[n/3]$ üç tane noktalı kümemiz oldu. İlk üç noktanın bir üçgen olma olasılığı p^3'tür, çünkü üç potansiyel kenarın herbirinin olma olasılığı p, üçünün birden olma olasılığı p^3'tür. Demek ki ilk üç noktanın üçgen olmama olasılığı $1-p^3$. Hem birinci üçlünün hem de ikinci üçlünün üçgen olmama olasılığı $(1-p^3)^2$. Benzer biçimde, $[n/3]$ üçlü kümenin hiçbirinin bir üçgen olmama olasılığı $(1-p^3)^{[n/3]}$. Demek ki bu üçlülerden en az birinin bir üçgen olma olasılığı $1 - (1-p^3)^{[n/3]}$. Dolayısıyla n noktalı bir çizgede en az bir üçgen olma olasılığı $n \ge 1 - (1-p^3)^{[n/3]}$ sayısından daha fazla.

1 $[r]$, r gerçel sayısının tam kısmıdır, örneğin $[2,9] = 2$.

Şimdi n'yi sonsuza götürelim. Eğer $p \neq 0$ ise sağ taraf 1'e gider. Dolayısıyla, eğer $p \neq 0$ değilse, yani kenar olasılığı sıfır değilse, o zaman rastgele sonlu bir çizgede bir üçgen olma olasılığı 1'e çok yakındır, o kadar ki n sonsuza gittiğinde, bu olasılık 1'e yakınsar. Yani çizgelerin çok çok çok büyük bir çoğunluğunda bir üçgen vardır.

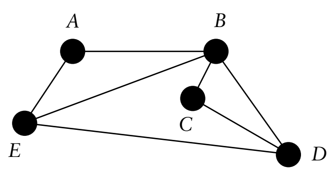
Eğer $p \neq 0$, 1 ise, verilen herhangi sonlu bir çizgeyi, büyük n'ler için, n noktalı bir çizgenin içinde bulma olasılığı 1'e yakındır. Bunun kanıtı da aynen yukardaki gibidir: Verilen çizgeye G diyelim. G'nin m noktası ve k kenarı olsun. n noktayı $[n/m]$ tane m noktalık ayrık kümelere ayıralım. Aynen yukardaki gibi düşünürsek, G'nin bu $[n/m]$ tane m noktalık çizgenin aynısı olmama olasılığı en az $(1 - p^k(1-p)^{n(n-1)/2 - k})^{[n/m]}$ dir, bu olasılık da n sonsuza giderken 0'a gider.

Demek ki çok büyük çizgeler büyük olasılıkla küçük çizgeleri içinde barındırırlar. ♦



Mesafe, Çap ve Moore Sabiti

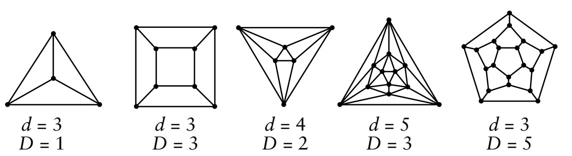
Bir çizgenin iki noktası arasındaki **mesafe**, o iki nokta arasındaki en kısa yolun kenar sayısıdır. Örneğin aşağıdaki çizgede A ve C arasındaki mesafe 2'dir.



Tekparça bir çizgenin **çapı**, o çizgedeki en uzun mesafedir. Örneğin herhangi iki noktası arasında bir kenar olan n noktalı K_n tamçizgesinin çapı 1'dir. Yukarıdaki çizgenin çapı 2'dir.

Her noktasının derecesi d olan bir çizgeye **d-düzgün** çizge denir. Örneğin K_n, $(n-1)$-düzgün bir çizgedir. Yukardaki çizge düzgün değildir. Aşağıdaki çizgeler sırasıyla 3, 3, 4, 5 ve 3-düzgündür. Bunların çapları da sırasıyla 1, 3, 2, 3, 5'tir.

d-düzgün ve D çaplı bir çizgenin nokta sayısı



çok çok fazla olamaz, d ve D'ye bağımlı olarak büyüyebilir ancak. Nitekim, d-düzgün ve D çaplı bir çizgenin en fazla

$$1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \ldots + d(d-1)^{D-1}$$

noktası olabilir. Bunun kanıtı oldukça kolaydır: Herhangi bir nokta seçelim ve o noktaya uzaklığı 0, 1,..., D olan noktaları sayalım; bunlardan en fazla (sırasıyla)

$$1,\ d,\ d(d-1),\ d(d-1)^2,\ \ldots,\ d(d-1)^{D-1}$$

tane olabilir.

Yukardaki

$$1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \ldots + d(d-1)^{D-1}$$

sayısına **Moore sabiti** denir. Moore sabitini $M(d, D)$ olarak gösterelim.

$$M(d,D) = \frac{d(d-1)^D - 2}{d-2}$$

eşitliğine dikkatinizi çekeriz.

Tam Moore sabiti $M(d, D)$ kadar noktası olan (yani maksimum noktası olan) d-düzgün, D çaplı çizgeler var mıdır? Evet vardır, ama fazla yoktur. Eğer $d \geq 3$ ve $D \geq 2$ ise, tam Moore sabiti $M(d, D)$ kadar noktası olan d-düzgün, D çaplı bir çizgede $D = 2$ olmalı ve $d = 3$, 7 ve (belki de, bilinmiyor) 57 olabilir.
http://maite71.upc.es/grup_de_grafs/table_g.html adresinden bu konuda daha fazla bilgi elde edebilirsiniz. ♦