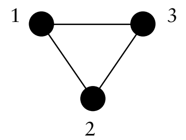
Kapak Konusu: Çizgeler

Tam Tur Olasılığı

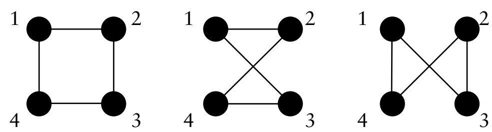
Adları 1, 2, ..., n olan n tane şehir olsun. Her şehirden her şehre giden bir yol olsun, yani K_n tamçizgesinde olduğumuzu varsayalım. Her şehirden sadece bir kez geçen ve başladığı şehirde biten tur sayısını bulalım.

Önce $n = 3$ olsun. Bu özelliği olan tek bir tur vardır. İşte o tur:



Turun hangi şehirde başladığını ve hangi yöne doğru gittiğini önemsemiyoruz, bizim için önemli olan turun kendisinden çok o turu veren yol olacak.

Şimdi $n = 4$ olsun. Bu sefer istediğimiz özelliklere sahip üç değişik tur buluruz. İşte o üç tur:



Bu üç turu sırasıyla 1234, 1243 ve 1324 olarak gösterebiliriz.

1234 diye gösterdiğimiz birinci turu,

1234	1432
2341	2143
3412	3214
4123	4321

olarak da gösterebilirdik. Bunların hepsi aynı turdur. Dediğimiz gibi turun kendisiyle değil o turu veren yolla ilgileniyoruz. Bir başka deyişle K_n çizgesinde kaç tane C_n altçizgesi olduğunu hesaplamak istiyoruz.

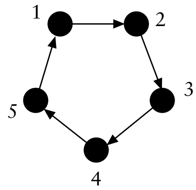
Eğer $n = 5$ ise her şehirden bir kez geçen kaç tur vardır? Bu turları teker teker çizebiliriz. Teker teker çizdik ve toplam 12 tur bulduk:

12345	12354
12435	12453
12534	12543
13245	13254
13425	13524
14235	14325

turları, başka da yoktur.

Genel olarak, n şehirden sadece bir kez geçen ve başladığı şehirde biten kaç tur vardır?

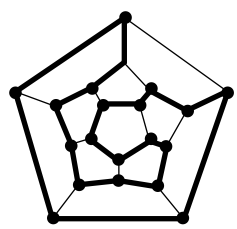
n sayıyı $n!$ biçimde sıraya dizebiliriz. Her sıralamayı bir yolculuk olarak görebiliriz. Örneğin 12345 yolculuğu 1'den başlar, 2'ye gider, sonra 3'e, 4'e, 5'e ve en sonunda 1'e geri döner. Bu bir turdur. Ancak bazı yolculuklar aynı turu verirler. Örneğin, 12345 yolculuğunu yönünü değiştirmeden bir başka şehirden başlayarak yapabilirdik. Sözgelimi ikinci şehirden başlayıp (yön değiştirmeden) 23451 yolculuğunu elde edebilirdik, ya da beşinci şehirden başlayıp ve gene yön değiştirmeden 51234 yolculuğunu elde edebilirdik. Ayrıca, her yolculuğu ters yöne doğru da yapabiliriz. Bunlar da aynı turu verir, örneğimiz olan 12345 yolculuğunun ters yöndeki yolculuğu 15432 yolculuğudur. Sonuç olarak aşağıdaki yolculukların herbiri aynı turu (12345 turunu) verir:



12345	15432
23451	21543
34512	32154
45123	43215
51234	54321

Demek ki tam $2n$ yolculuk bize aynı turu veriyor. Toplam $n!$ yolculuk olduğundan ve her $2n$ yolculuk tek bir tur verdiğinden, toplam tur sayısı $n!/2n$, yani $(n-1)!/2$'dir.

Burada yaptığımız, K_n tamçizgesinin tüm **Hamilton turlarını**, yani her noktadan tek bir kez geçen (dolayısıyla her kenardan en fazla bir kez geçen) ve başladığı noktada biten turları bulmaktır.



Bir çizgenin bir Hamilton turu

Eğer Devlet Karayolları Müdürlüğü n şehir arasına rastgele n yol döşese, bu yolların bir tam tur olma olasılığı kaçtır?

$n = 3$ ise bu olasılık 1'dir (yüzde yüz).

Eğer $n = 4$ ise bu olasılık 3/15 = 1/5'tir, çünkü $n = 4$ ise tam tur sayısı yukarda gördüğümüz üzere 3'tür ve 4 noktalı ve 4 kenarlı çizge sayısı

$$\binom{4(4-1)/2}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

tir. (Bunu sayfa 18'de görmüştük.)

Eğer $n = 5$ ise bu olasılık 12/252 = 1/21'e düşer çünkü yukarda sıraladığımız üzere 5 noktalı 12 tam tur vardır ve 5 noktalı ve 5 kenarlı çizge sayısı

$$\binom{5(5-1)/2}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

dir.

Görüldüğü gibi – en azından küçük n'ler için – n arttıkça Devlet Karayolları Müdürlüğü'nün rastgele n şehir arasına rastgele n yol döşeyerek bir tam tur elde etme olasılığı azalıyor.

n noktalı ve n kenarlı

$$\binom{n(n-1)/2}{n}$$

çizge olduğundan, n noktalı ve n kenarlı rastgele seçilmiş bir çizgenin bir tam tur (yani bir Hamilton turu) olma olasılığı

$$\frac{(n-1)!/2}{\binom{n(n-1)/2}{n}}$$

dır. n sonsuza giderken bu sayıların limitini bulmak istiyoruz.

Bu limitin basit bir hesapla hesaplanıp hesaplanamayacağını bilmiyoruz ama meşhur Stirling formülü ve biraz analiz kullanarak limitin 0 olduğu kolaylıkla kanıtlanır. Stirling formulü şunu söyler:

Stirling Formülü. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1.$

Yukarda limitini hesaplamak istediğimiz terimde, Stirling formülüne göre, her $m!$ yerine $(m/e)^m\sqrt{2\pi m}$ koyabiliriz.

Bunu yapalım. Sonra da basit biraz analizle bulduğumuz yeni terimin limitini hesaplayalım. Sonuç, tahmin ettiğimiz gibi 0 çıkacaktır.

Yukarda verdiğimiz Stirling formülü çizgeler kuramında sık kullanılan bir araçtır. Ayrıca son derece şaşırtıcı bir formüldür. Bir anlamda, aritmetik ($n!$), analiz (e), geometri (π) ve kombinatoriyel hesap arasında bir ilişkidir. Bir başka sayıda kanıtlarız bu eşitliği. ♦

Atın Yolculuğu

$n \times m$ boyutlu bir satranç tahtasında atı her kareden sadece bir kez geçecek biçimde gezdirmek demek, aslında nm noktalı bir çizgede bir tam tur bulmak demektir. Çizgemizin noktaları satranç tahtasının kareleri. Eğer at bir kareden diğer kareye gidebiliyorsa, o iki kareye tekabül eden noktalar arasına bir kenar koyalım. Soldaki gibi oldukça zengin ve görsel olarak güzel bir çizge elde ederiz. Bu çizgenin her tam turu, atın iki kez aynı kareden geçmeden her kareye uğrayan bir yolculuğudur. Aşağıdaki şekillerde bu problemin birkaç çözümünü görüyorsunuz. Ancak ne yazık ki atı başladığı noktaya geri getirememişiz. Siz geri getirebilir misiniz? ♦