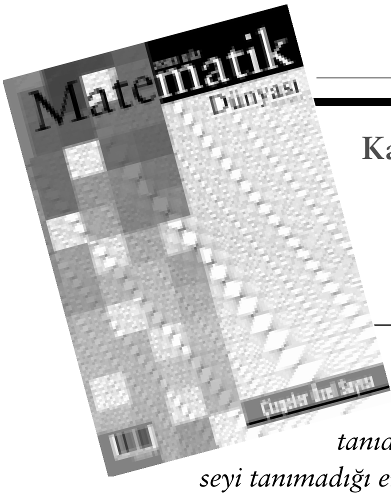
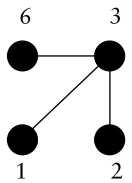


Kapak Konusu: Çizgeler

Ramsey Sayıları

Altı kişilik bir toplulukta ya herkesin birbirini tanıdığı ya da hiçbirinin hiçkimseyi tanımadığı en az üç kişi mutlaka vardır. Zekâ oyunları köşelerinde sık sık okurlardan bu önermenin kanıtlanması istenir. Ramsey kuramının en basit örneği olan bu önermeyi kanıtlayalım önce. Sonra çok daha zor, yanıtı bile bilinmeyen sorular soracağız.

Altı kişiyi bir çizgenin altı noktası olarak görelim. Noktalara 1, 2, 3, 4, 5, 6 diyelim. İki nokta arasına, o iki noktanın simgelediği kişilerin tanışıp tanışmamalarına göre, kırmızı ya da mavi bir kenar çizelim. Sözgelimi, tanışıyorlarsa kenar kırmızı olsun, tanışmıyorlarsa mavi. Her kenarı ya kırmızıya ya da maviye boyanmış K_6 tamçizgesini elde ederiz. Yukarıdaki önermeyi, "*Kenarları kırmızı ve maviye boyanmış* K_6 *tamçizgesinde ya en az bir kırmızı üçgen ya da en az bir mavi üçgen vardır*," olarak ifade edebiliriz.

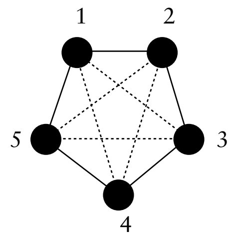


Her noktaya beş kenar değdiğinden, her noktaya ya en az üç kırmızı kenar ya da en az üç mavi kenar değer. Noktamızın 3 numaralı nokta olduğunu, bu noktaya bitişik en az üç kırmızı kenar olduğunu ve bu kırmızı kenarların {1,3}, {2,3} ve {6,3} kenarları olduğunu varsayalım. Artık sadece 1, 2, 3 ve 6 noktalarını dikkate alacağız.

1, 2 ve 6 noktaları arasındaki kenarlardan biri kırmızıysa, bu kırmızı kenarın iki uç noktası ve 3 noktası kırmızı bir üçgen oluştururlar. Aksi halde, yani kenarların hepsi maviyse o zaman bu üç nokta mavi bir üçgen oluşturur.

Matematiksel olarak ifade edecek olursak, *kenarları iki renge boyanmış* K_6 *çizgesinde tek renkli bir üçgen vardır*, önermesini kanıtladık. Elbette bu önerme, eğer $n \geq 6$ ise, tüm K_n çizgeleri için de doğrudur, çünkü $n \geq 6$ ise, K_6, K_n'nin içinde yaşar.

Aynı önermeyi şöyle de ifade edebiliriz: *Eğer* $n \geq 6$ *ise, kenarları iki renge boyanmış* K_n *çizgesinde tek renkli* K_3 *yaşar.*



Bu önerme, yandaki çizgeden de anlaşılacağı üzere $n = 5$ için doğru değildir, n illa en az 6 olmalıdır, daha az olamaz.

Yukardaki önermede K_3 yerine K_4 almak istersek durum ne olur?

Soru: *n en az kaç olmalıdır ki, iki renge boyanmış* K_n *tamçizgesinde tek renkli bir* K_4 *yaşasın?*

4 yerine herhangi bir a doğal sayısı alıp benzer soruyu sorabiliriz:

Soru: *a doğal sayısı verilmiş olsun. n en az kaç olmalıdır ki kenarları iki renge boyanmış* K_n *tamçizgesinde tek renkli bir* K_a *yaşasın? Hatta böyle bir n var mıdır?*

Bu soruyu da genelleştirebiliriz:

Soru: *a ve b doğal sayıları verilmiş olsun. n en az kaç olmalıdır ki, kenarları A ve B renklerine boyanmış* K_n *tamçizgesi ya tamamen A renkli bir* K_a *içersin ya da tamamen B renkli bir* K_b*? Hatta böyle bir n var mıdır?* (Eğer $a = b$ ise, bir önceki sorunun aynısını elde ederiz.)

Evet, öyle bir n vardır:

Teorem (Ramsey, 1930). *a ve b herhangi iki doğal sayı olsun. Öyle bir N vardır ki, eğer $n \geq N$ ise, kenarları A ve B renklerine boyanmış* K_n *tamçizgesinde ya tamamen A renkli bir* K_a *ya da tamamen B renkli bir* K_b *vardır.*

Yukardaki teoremde varlığı iddia edilen en küçük N sayısına **Ramsey sayısı** denir ve bu sayı $r(a, b)$ olarak yazılır.

Yukarda, $r(3, 3) = 6$ olduğunu gördük.

Sorudaki simetriden dolayı $r(a, b) = r(b, a)$. Dolayısıyla $a \leq b$ eşitsizliğini varsayabiliriz.

Bazı $r(a, b)$ sayılarını bulmak kolay:

$$r(1, b) = 1$$
$$r(2, b) = b.$$

Ramsey sayıları için genel bir formül bilinmiyor. Ramsey sayılarının bulunması çizge kuramının zor ve yanıtlanmamış sorularından biridir. Bu sayfanın en altındaki çizelge bilinen bazı Ramsey sayılarını, bilinmeyenlerin ise alt ve üstsınırlarını verir.

Aşağıdaki sonuç $r(a, b)$ sayılarına tümevarımsal bir üstsınır getiriyor.

Teorem (Erdös ve Szekeres). *$a \geq 2$ ve $b \geq 2$ iki tamsayıysa, $r(a, b) \leq r(a, b-1) + r(a-1, b)$.*

Eğer $r(a, b-1)$ ve $r(a-1, b)$ sayılarının ikisi de çiftse, $r(a, b) < r(a, b-1) + r(a-1, b)$.

Kanıt: $n = r(a, b-1) + r(a-1, b)$ olsun. K_n çizgesini herhangi bir biçimde iki renge boyayalım. Bu çizgede ya tamamen A rengine boyanmış bir K_a ya da tamamen B rengine boyanmış bir K_b bulacağız. Bu da teoremi kanıtlayacak.

v, K_n'nin herhangi bir noktası olsun. K_n'nin geri kalan $n - 1$ noktasına bakalım. v'nin A renkli kenarla bağlandığı noktalara $A(v)$, B renkli kenarla bağlandığı noktalara $B(v)$ diyelim.

$$|A(v)| + |B(v)| = n - 1 = r(a, b-1) + r(a-1, b) - 1$$

eşitlikleri bariz. Dolayısıyla hem $|A(v)| < r(a, b-1)$ hem de $|B(v)| < r(a-1, b)$ eşitsizlikleri sağlanamaz. Demek ki ya $|A(v)| \geq r(a-1, b)$ ya da $|B(v)| \geq r(a, b-1)$.

Birinci durumda, $A(v)$ ya A renkli bir K_{a-1} ya da B renkli bir K_b içerir. Dolayısıyla $A(v) \cup \{v\}$ ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b içerir. İkinci durumda, benzer biçimde, $B(v) \cup \{v\}$ ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b içerir. Sonuç olarak $r(a, b) \leq r(a, b-1) + r(a-1, b)$.

Şimdi $r(a, b-1)$ ve $r(a-1, b)$'nin çift olduklarını varsayalım. Bu kez $n = r(a, b-1) + r(a-1, b) - 1$ olsun. Demek ki n tek. K_n'de ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b bulacağız. B renkli kenarları K_n'den silip n noktalı bir G çizgesi elde edelim. G'nin tek sayıda noktası olduğundan (ve noktaların derecelerin toplamının çift olduğunu bildiğimizden, bknz. sayfa 25), G'de derecesi çift olan mutlaka bir nokta olacaktır. Bu noktaya v diyelim. Demek ki $A(v)$ çift bir sayı, dolayısıyla $A(v) \neq r(a-1, b) - 1$, bunu aklımızda tutalım. Öte yandan,

$$|A(v)| + |B(v)| = n - 1 = [r(a-1, b) - 2] + r(a, b-1)$$

olduğundan, hem $|A(v)| \leq r(a-1, b) - 2$ hem de $|B(v)| < r(a, b-1)$ eşitsizlikleri sağlanamaz. Demek ki ya $|A(v)| > r(a-1, b) - 2$ ya da $|B(v)| \geq r(a, b-1)$ eşitsizliklerinden biri sağlanacak. Ama $A(v) \neq r(a-1, b) - 1$. Dolayısıyla ya $|A(v)| > r(a, b-1)$ ya da $|B(v)| \geq r(a, b-1)$. Aynen yukarda yaptığımız gibi K_n'de ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b buluruz. □

Ne yazık ki eşitlik doğru değil. Örneğin, aşağıdaki çizelgeden, $r(3, 6) = 18$, $r(4, 5) = 25$ ve $r(4, 6) \leq 41$ ilişkilerlerini biliyoruz, dolayısıyla

$$r(4, 6) \leq 41 < 43 = 18 + 25 = r(3, 6) + r(4, 5).$$

Yazımızı $r(a, b)$'nin bir üstsınır formülünü bularak tamamlayalım.

Sonuç: $r(a,b) \leq \binom{a+b-2}{b-1}$.

Kanıt: Kanıtı $a+b$ üzerine tümevarımla yapacağız. Küçük $a + b = 2$ için, yani $a = b = 1$ için eşitsizliğin doğruluğu belli. $a + b \geq 3$ olsun. Yukardaki teoreme ve tümevarım varsayımına göre,

$$r(a,b) \leq r(a-1,b) + r(a,b-1)$$
$$\leq \binom{a+b-3}{b-1} + \binom{a+b-3}{b-2} = \binom{a+b-2}{b-1}.$$

Alıştırma. Aşağıdaki çizelgeyi dikkate almadan $r(3,5)$ ve $r(4,4)$ Ramsey sayılarını hesaplayın. ♦

a \ b	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35-41	49-61	55-84	69-115
5			43–49	58-87	80-143	95-216	116-316
6				102-165	109-298	122-495	153-780
7					205-540	216-1031	227-1713
8						282-1870	295-3583
9							565-6625

$r(a, b)$ Ramsey sayıları