Kapak Konusu: Çizgeler

Noktasız Çizgeleri Saymak

***n* Noktalı Çizge Sayısı** adlı yazıda n noktası adlandırılmış $2^{n(n-1)/2}$ tane çizge olduğunu gördük. Ancak noktaları adlandırılmamış çizge sayısını bulmak için bir formül vermedik. Bu yazıda, noktaları adlandırılmamış çizge sayısını bulmak için görece daha az zahmetli ama gene de büyük sayılar için uygulaması zor bir yöntem belirteceğiz. Bu yöntem ne yazık ki orta düzeyde soyut cebir bilgisi istiyor.

Cauchy Formülü. G, sonlu bir X kümesi üzerine etki eden sonlu bir grup olsun. Eğer $x \in X$ ve $g \in G$ ise,

$$Gx := \{gx : g \in G\} \subseteq X$$
$$G_x := \{g \in G : gx = x\} \leq G$$
$$\text{Fix}(g) := \{x \in X : gx = x\} \subseteq X$$

olsun.

Gx kümesine **yörünge** denir. Kolayca kanıtlanacağı üzere, her $x, y \in X$ için,

$$\text{ya } Gx = Gy \text{ ya da } Gx \cap Gy = \emptyset. \qquad (*)$$

Demek ki X, yörüngelerin ayrık bileşimidir. Toplam yörünge sayısına $|X/G|$ diyelim.

Gene kolayca görüleceği üzere, $gG_x \in G/G_x$ elemanını $gx \in Gx$ noktasına gönderen fonksiyon iyi tanımlıdır ve bir eşlemedir. Dolayısıyla

$$|G|/|G_x| = |Gx| \qquad (**)$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi

$$A := \{(g, x) \in G \times X : gx = x\}$$

kümesini iki değişik türde sayalım.

Önce ikinci koordinatı sabitleyerek sayalım:

$$|A| = \textstyle\sum_{x \in X} |G_x|.$$

Bundan, (*)'dan ve (**) formülünden,

$$\begin{aligned} |A| &= |G| \times \textstyle\sum_{x \in X} 1/|Gx| \\ &= |G| \times \textstyle\sum_{Gx \text{ yörüngeleri}} (\sum_{y \in Gx} 1/|Gy|) \\ &= |G| \times \textstyle\sum_{Gx \text{ yörüngeleri}} (\sum_{y \in Gx} 1/|Gx|) \\ &= |G| \times \textstyle\sum_{Gx \text{ yörüngeleri}} 1 = |G| \times |X/G| \end{aligned}$$

çıkar.

Şimdi de birinci koordinatı sabitleyerek sayalım: $|A| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$.

Son iki formülden,

$$\textstyle\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = |G| \times |X/G|$$

eşitliği çıkar.

Ayrıca, $|\text{Fix}(g)|$ sayısı sadece eşleniklik sınıfına göre değiştiğinden (yani $g^G = h^G$ ise $|\text{Fix}(g)| = |\text{Fix}(h)|$), $|\text{Fix}(g)|$ sayısını her eşleniklik sınıfından tek bir eleman için hesaplamak yeterlidir. Yani,

$$\textstyle\sum_{\text{eşleniklik sınıfları}} |g^G|\,|\text{Fix}(g)| = |G|\,|X/G|. \qquad (+)$$

Cauchy'ye ait olan bu formülü uygulamak için, $|g^G| = |G|/|C_G(g)|$ eşitliğini bilmek kimi zaman yararlı olabilir.

Çizgelere Uygulama. Noktaları adlandırılmamış çizge sayısını bulmak için, Cauchy formülünü özel bir duruma uygulayacağız. $G := \text{Sym}(n)$ olsun. X, noktaları adlandırılmış n noktalı çizgeler kümesi olsun. Daha önce gördüğümüz üzere, $|X| = 2^{n(n-1)/2}$. $\text{Sym}(n)$ grubu X kümesini tahmin edilen en doğal biçimde etkilesin: Eğer $g \in G = \text{Sym}(n)$ ve $\Gamma \in X$, n noktalı bir çizgeyse, $g\Gamma$ çizgesi, Γ'nın noktalarına g'yi uygulayarak ve Γ'nın kenarlarını $g\Gamma$'ya taşıyarak elde edilmiş çizge olsun, yani g, Γ'yla $g\Gamma$ çizgeleri arasında bir eşyapı dönüşümü olsun. O zaman, noktalandırılmamış çizge sayısı $|X/G|$'dir.

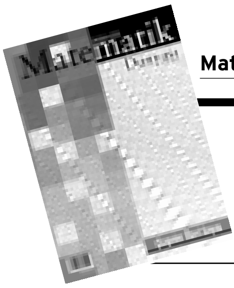
(+) formülüne göre, her $g \in \text{Sym}(n)$ için, $|g^{\text{Sym}(n)}|$ ve $\text{Fix}(g)$ bulunabilirse, $|X/G|$ formülü bulunabilir. Birinci sayıyı bulmayı 2003-I sayfa 22'de ve 2003-II sayfa 103'te görmüştük. $|\text{Fix}(g)|$ sayısını hesaplamak daha zor.

Bir örnekle $|\text{Fix}(g)|$ sayılarının nasıl hesaplanacağını gösterelim. n herhangi bir sayı olsun ve $g = (1\ 2)$ olsun. g'nin sabitlediği n noktalı çizge sayısını bulacağız. $\{3, \ldots, n\}$ noktalarından oluşan altçizge herhangi bir çizge olabilir. Bunlardan $2^{(n-2)(n-3)/2}$ tane var. 1 noktası $\{3, \ldots, n\}$ noktalarından oluşmuş çizgelere 2^{n-2} değişik biçimde bağlanabilir. 1 noktası bu çizgelere nasıl bağlanmışsa, 2 noktası da bu çizgeye öyle bağlanmış olmalı. Ayrıca 1 ve 2 noktaları arasında bir kenar olabilir ya da olmayabilir. Demek ki,

$$|\text{Fix}(12)| = 2 \times 2^{n-2} \times 2^{(n-2)(n-3)/2}.$$

Çizge sayısı için bugün bilinen en iyi yaklaşık değer şöyle [H]:

$$\boxed{\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}\left(1 + \frac{n^2 - n}{2^{n-1}} + \frac{8n(n-1)(n-2)(n-3)(3n-7)(3n-9)}{2^{2n}} + O\left(\frac{n^5}{2^{5n/2}}\right)\right)}$$



Çizgeler Dizin ve Kaynakçası

Dizin

ağacın merkezi, 19
ağaç, 19
boyama, 10, 27, 28
C_n, 11, 29
çap, 31
çizge, 9, 10, 11
çöpçatanlık problemi, 21
$\Delta(G)$, 27
derece, 12, 13, 17, 25, 36
döngü, 11, 13, 15, 19
dört renk problemi, 27, 29, 86
düğüm, 11
düzgün çizge, 31
düzlemsel çizge, 10, 24, 26
$E(G)$, 11
el sıkışma teoremi, 25
en kısa kapsayıcı ağaç, 38, 39
eşik fonksiyonu, 36
Euler çizgesi, 14, 15
Euler Formülü, 24
Euler turu, 12, 13, 14, 39
gezgin satıcı problemi, 37
graf, 9
Haluk Oral, 46
Hamilton turu, 32, 34, 37
iki kümeli çizge, 21, 28
iki kümeli tamçizge, 11
ikiparça tamçizge, 11, 18
Jordan Eğri Teoremi, 24
K_n, 11, 27, 41
$K_{n,m}$, 11
kapsayıcı ağaç, 38
kenar, 11
kenar renk sayısı, 27
komşu noktalar, 11
Königsberg köprü problemi, 13
köşe, 11
mesafe, 31
Moore sabiti, 31
mükemmel eşleme, 21
nokta, 9, 10, 11
nokta renk sayısı, 28
orman, 19
Petersen çizgesi, 29
Platon cisminin çizgeleri, 29
Pólya Sayılandırma Yöntemi, 16
Prim algoritması, 39
Prüfer dizisi, 20
Ramsey kuramı, 41
Ramsey sayısı, 41
Ramsey Teoremi, 41, 43
rastgele çizge, 30, 34
Stirling formülü, 33
tamçizge, 11, 27, 35
tekdöngü 10, 13
tekparça çizge, 11, 12, 17, 18
üçgen, 30,
$V(G)$, 11
yalın çizge, 10
$\chi(G)$, 28
$\chi'(G)$, 27

Kaynakça

[AZ] Martin Aigner ve Günter M. Ziegler, **Proof from THE BOOK**, Springer 1999.

[BK] R. Balakrishnan ve K. Ranganathan, **A Textbook of Graph Theory**, Universitext Serisi, Springer 1999.

[B_1] Béla Bollabás, **Modern Graph Theory**, Graduate Texts in Mathematics Serisi 184, Springer 1998.

[B_2] Béla Bollabás, **Random Graphs** (ikinci basım), Cambridge Studies in Advanced Mathematics Serisi, Cambridge University Press 2001.

[CL] Gary Chartrand ve Linda Lesniak, **Graphs & Digraphs** (üçüncü basım), Chapman & Hall 1996.

[D] Reinhard Diestel, **Graph Theory** (ikinci basım), Graduate Texts in Mathematics Serisi 173, Springer 2000.

[DS] A.G. Dirac ve S. Shulster, *A theorem of Kuratowski*, Indag. Math. 16 (1954) 343-348.

[GS] Branko Grünbaum ve G.C. Shephard, *A new look at Euler's Theorem for polyhedra*, The American Mathematical Monthly 101/2, Şubat 1994.

[JŁR] Svante Janson, Tomasz Łuczak ve Andrej Ruciñski, **Random Graphs**, John Wiley & Sons 2000.

[H] Harary, F. *Enumeration of Graphs*, **Graph Theory**'de, Reading, MA: Addison-Wesley, 185-187, 1994.

[K] K. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en topology*, Fund. Math. 15 (1930), 271-283.

[LLKS] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan ve D.B. Shmoys (editörler), **The Traveling Salesman Problem**, John Wiley & Sons, Chichester, 1985.

[LR] C. C. Lindner, C. A. Rodger, **Design Theory**, CRC Press, Boca Raton 1997.

[RW] Ronald C. Read ve Robin J. Wilson, **An Atlas of Graphs**, Oxford Science Publications 1998.

[S] Joel Spencer, **The Strange Logic of Random Graphs**, Algorithms and Combinatorics Serisi 22, Springer 2001.

[Th] C. Thomassen, *Kuratowski's Theorem*, J. Graph Theory 5 (1981) 225-241.

[Tv] H. Tverberg, *A proof of Kuratowski's teorem*, **Graph Theory in Memory of G.A. Dirac**'ta, (editörler: L.D. Andersen vb), North Holland, Amsterdam, 1987.

[We] Douglas West, **An Introduction to Graph Theory**, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.

[Wi] R. J. Wilson, **Introduction to Graph Theory**, Longman, 1996.

Internet'ten

Çizgeler Kuramı: http://www1.cs.columbia.edu/~sanders/graphtheory/
http://mathworld.wolfram.com/SimpleGraph.html

Çizge Sayısı: http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eisA.cgi?Anum=A000088

DIMACS, Center for Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science: http://www.dimacs.rutgers.edu/Challenges

Gezgin Satıcı Problemi: http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB_home.html

Hamilton Çizgeleri: http://www.ijp.si/vega/HtmlDoc/MANUAL/HAMCUB2.HTM
http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/Hamilton.html

Selda Küçükçifçi