

Topoloji Köşesi

Burak Özbağcı*
bozbagci@ku.edu.tr



Topoloji Nedir?

Ne iş yaptığım sorulduğunda matematikçi olduğumu söylerim elbet. Karşımdakinin az da olsa bilim merakı varsa (ya da tümüyle laf olsun diye), ikinci sorusu matematiğin hangi dalında çalıştığımı olur. Topoloji diye yanıtladığımda karşımdakinin yüzünde beliren soru işaretini artık kanıksadım.

Topoloji matematiğin bir dalıdır ve sanılabileceği gibi topoğrafyayla eş anlamlı değildir. Topoğrafya bir coğrafi alandaki dağları, ırmakları vs. tarif eder.

Topolojinin ne olup olmadığını anlatmak için verilen tipik örnek saplı bir kahve kupasının dış yüzeyiyle bir simidin dış yüzeyinin bir anlamda aynı olduğudur. Eğer kahve kupası ıslak kilden yapılmış olsaydı, sapına fazla dokunmadan kalan kısmını rahatlıkla eğip büküp ovalayıp düzleştirerek kupanın tümünü bir simit şekline sokabilirdik. Topoloji için önemli olan nokta, karşılaştığımız bu iki yüzeyin her ikisinde de sadece bir delik olmasıdır. (Elbette tüm çamuru bir topak haline getirip bu delikten kurtulabiliriz ama bu hareket sürekli olmadığı için topolojik değildir.) Kupanın içine doğru olan derinliğin ya da eğriliğin topolojik olarak hiçbir önemi yoktur.

Tamam da, nasıl oluyor da böyle basit bir çamur oyunu matematiğin bir dalı olma-ya hak kazanıyor? Hikâye, Euler'ın 1736'da yazdığı bir makaleyle başlar. Euler bu makalede Königsberg isimli bir şehirdeki yedi köprüyü hepsinden sadece tam bir kez geçmek koşuluyla dolaşmanın mümkün olmadığını göstermiştir (bknz. sayfa 13). Bu soru aslında topolojik bir sorudur, çünkü örneğin köprülerin büyüklüğünün ya da birbirlerinden uzaklıklarının sorunun çözümüyle hiçbir ilgisi yoktur; önemli olan köprülerin ve onları birbirine bağlayan yolların şehir içindeki konumudur.

Matematik tarihinde topoloji adına ikinci gelişme yine Euler'e aittir. Bir dışbükey çokyüzlü için Euler 1752'de şu ünlü formülü yayımlamıştır: “köşelerin sayısı – kenarların sayısı + yüzlerin sayısı = 2”. (Bu formülün sağ tarafı n delikli bir dışbükey çokyüzlü için yanlıştır ve 1813'te İsviçreli matematikçi Lhuillier tarafından sağ taraf $2 - 2n$ olarak düzeltilmiştir). Bu formül topolojik bir yapının değişmez bir özelliğinin ilk örneğidir (bknz. sayfa 24).

Topoloji sözcüğünü ilk kez 1847'de Alman matematikçi Listing kullanmıştır. Listing'in topolojik fikirleri Gauss sayesinde gelişmesine karşın Gauss bu konuda yayın yapmamıştır. Yine 1861'de Listing, yüzeylerin bağlantılı olup olmadığı hakkında yazdığı makalede Möbius şeridinden (Möbius'den dört yıl önce) söz etmiştir. Uzun ince bir şeridin iki ucunu, uçlardan sadece birini 180 derece kıvrıp karşı uca yapıştırarak elde edilen yüzeyin ismi Möbius şerididir (yandaki şekil). Bu yüzeyin özelliği tek yüzlü olmasıdır ve bu da topolojik bir özelliktir.

Günümüzde topolojinin nokta-küme topolojisi, cebirsel topoloji, alçak-boyutlu topoloji, differensiyel topoloji, geometrik topoloji gibi birçok alt dalı çalışılmaktadır. Bu konular birbirlerine yakın olmakla birlikte, problemleri ve teknikleri büyük çeşitlilik gösterebilir. Yukarıda verdiğim örnekler sadece yüzeylerle (iki boyutlu) ilgili olduğu için anlaması kolaydır. Topolojinin esas problemleri üç ve daha büyük boyutlarda ortaya çıkmaktadır. Hatta sonlu boyuttaki bir topoloji problemi bazen sonsuz boyutlu uzayların analizi sayesinde çözülebilmektedir. Örneğin 1982'de Donaldson dört boyutlu Öklid uzayında sonsuz tane değişik differensiyel yapı olduğunu bu yolla göstermiştir. Bu özelliğin sadece dört boyutlu Öklid uzayında ortaya çıkması ayrıca ilginç. ♦

* Koç Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.