

# Gerçel Sayıların Toplamsal Altgrupları

Nurettin Ergun\*, Cavit Hafızoğlu\*\* ve Ali Nesin\*\*\*

Bu yazıda, gerçel sayıların çıkarma altında kapalı ve boş olmayan, yani

$$\text{her } x, y \in A \text{ için } x - y \in A$$

özelliğini sağlayan  $A \subseteq \mathbb{R}$  altkümeleriyle ilgileneceğiz. Bu tür gerçel sayı kümelerine  $\mathbb{R}$ 'nin **toplamsal altgrubu** denir. “Toplamsal altgrup” yerine, daha kısa olsun diye “grup” sözcüğünü kullanacağız. Hemen birkaç (toplamsal) grup örneği verelim.

**Örnekler:**  $\{0\}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  kümelerinin herbiri birer gruptur. Eğer  $x \in \mathbb{Z}$  bir gerçel sayıysa,  $A = x\mathbb{Z} = \{xn : n \in \mathbb{Z}\}$  bir gruptur. Burada,  $x = 0$  alırsak  $\{0\}$ 'ı,  $x = 1$  alırsak  $\mathbb{Z}$ 'yi buluruz.  $\mathbb{Q}$  ve  $\mathbb{R}$  bu türden değildir. Eğer  $x, y \in \mathbb{Z}$  ise,

$$A = x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} := \{xn + ym : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi de bir gruptur. Bu son örneği genelleştirebiliriz:  $x$  ve  $y$  gibi iki sayı alacağımıza  $x, y$  ve  $z$  gibi üç sayı alabiliriz, hatta  $k$  değişik sayı alabiliriz...

Grupları önce cebirle anlamaya çalışacağız. Cebirin yetmediği yerde analize başvuracağız. Önce çok temel bir sonuç:

**Önsav 1.** *A bir grupsa,  $0 \in A$ ,  $-A = A$  ve  $A$  toplama altında kapalıdır.*

**Kanıt.** Boşküme olmadığından,  $A$ 'da en az bir eleman var, diyelim  $a \in A$ . Çıkarma altında kapalı olduğundan,  $0 = a - a \in A$ . Önsavın birinci kısmı kanıtlandı. Şimdi  $a, b \in A$  olsun.  $0, A$ 'da ve  $A$  çıkarma altında kapalı. Demek ki  $-b = 0 - b \in A$ . Bu da önsavın ikinci yarısı. Bundan da  $a + b = a - (-b) \in A$  çıkar.  $\square$

Yukarda  $x\mathbb{Z}$  ve  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$  örneklerini gördük. Birinci tip örnek oldukça basit: belli bir  $x$  sayısının tam katları. İkinci tip örnekleri algılamak daha zor. Örneğin  $5\mathbb{Z} + (3/2)\mathbb{Z}$  nasıl bir kümedir? Ya  $\pi\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ ? Bu kümeler, belli bir  $z \in \mathbb{Z}$  için  $z\mathbb{Z}$  kümesine eşit midir? Daha genel olarak,  $x$  ve  $y$  gerçel sayıları verilmişse,  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$  kümesi, belli bir  $z \in \mathbb{Z}$  için  $z\mathbb{Z}$  kümesine eşit olabilir mi? Olursa ne zaman olur?

**Önsav 2.** *Eğer  $x$  ve  $y$  kesirli sayılarsa,  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$  grubu belli bir  $z \in \mathbb{Z}$  için  $z\mathbb{Z}$ 'ye eşittir.*

\* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. [nergun@istanbul.edu.tr](mailto:nergun@istanbul.edu.tr)

\*\* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

\*\*\* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

**Kanıt:**  $x = 0$  ya da  $y = 0$  ise, sorun yok. Bundan böyle  $x \neq 0$  ve  $y \neq 0$  olsun.  $x\mathbb{Z} = (-x)\mathbb{Z}$  olduğundan,  $x$  ve  $y$ 'nin negatif olmadıklarını varsayabiliriz.  $x = alb$  ve  $y = cld$  olacak biçimde  $a, b, c, d$  pozitif tamsayılar seçelim. Şimdi önsavımızı doğruladığımızı kanıtlayacağımız  $z$  kesirli sayısını tanımlayalım:  $z = (ad, bc)/bd$  olsun. Burada,  $(ad, bc)$  sayısı  $ad$ 'yle  $bc$ 'nin en büyük ortak bölenidir.

Önce  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} \subseteq z\mathbb{Z}$  ilişkisini kanıtlayalım. Sol taraftaki kümeden bir  $\alpha$  sayısı alalım. Demek ki, belli  $n, m \in \mathbb{Z}$  tamsayıları için  $\alpha = xn + ym$ . Şimdi  $x$  ve  $y$  yerine  $alb$  ve  $cld$  koyalım:  $\alpha = (adn + bcm)/bd$  elde ederiz. Ama  $(ad, bc)$  sayısı hem  $ad$ 'yi hem de  $bc$ 'yi bölüyor, yani belli  $u, v \in \mathbb{Z}$  için  $ad = u(ad, bc)$  ve  $bc = v(ad, bc)$ . Dolayısıyla

$$\alpha = (ad, bc)(un + vm)/bd = z(un + vm) \in z\mathbb{Z}.$$

Şimdi de  $z\mathbb{Z} \subseteq x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$  ilişkisini kanıtlayalım. Sol taraftan bir  $\alpha$  elemanı alalım. Demek ki belli bir  $n \in \mathbb{Z}$  için,  $\alpha = zn = (ad, bc)n/bd$ . Öte yandan  $(ad, bc)$  sayısı  $ad$  ve  $bc$ 'nin en büyük ortak böleni olduğundan, belli  $u, v \in \mathbb{Z}$  tamsayıları için  $(ad, bc) = uad + vbc$  eşitliği geçerlidir (yan sayfanın üstündeki kareye bakın.) Dolayısıyla  $\alpha = (uad + vbc)n/bd = (alb)un + (cld)vn = xun + yvn \in x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ .  $\square$

**Sonuç 3.**  *$x, y \in \mathbb{R}$  olsun. Eğer  $y \neq 0$  ise ve  $x/y \in \mathbb{Q}$  ise, belli bir  $z \in \mathbb{R}$  için  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} = z\mathbb{Z}$ .*

**Kanıt:**  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} = y((x/y)\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$  ve Önsav 2'ye göre  $(x/y)\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  kümesi, belli bir  $q \in \mathbb{Q}$  için  $q\mathbb{Z}$ 'ye eşit. Demek ki  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} = y((x/y)\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) = yq\mathbb{Z}$ .  $\square$

$x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$  kümesinin ne zaman  $z\mathbb{Z}$  biçiminde yazılacağını bulduk ama, ne zaman yazılamayacağını bulamadık. Bunun için biraz analiz yapmamız gerekecek.

$A \subseteq \mathbb{R}$  olsun. Eğer her gerçel  $x < y$  sayı çifti için,  $x < a < y$  eşitsizliğini sağlayan bir  $a \in A$  varsa,  $A$  kümesine ( $\mathbb{R}$ 'de) **yoğun** denir. Örneğin  $\mathbb{Q}$  ve  $\mathbb{R}$  kümeleri yoğundur.  $x\mathbb{Z}$  kümeleri yoğun değildir, çünkü örneğin  $0$ 'la  $x$  arasında  $x\mathbb{Z}$ 'nin elemanı yoktur.

$x\mathbb{Z}$  kümeleri yoğun değil ama  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$  kümeleri yoğun olabilirler. Her zaman olmasalar da bazen yoğun olabilirler. Şu soruyu yanıtlayacağız:  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$  kümeleri ne zaman yoğundurlar? Bir tanıma ve bir önsava daha gereksiniyoruz.

**Teorem.**  $a$  ve  $b$  her ikisi de sıfır olmayan iki doğal sayı olsun.  $d$ ,  $a$  ve  $b$ 'nin en büyük ortak böleni olsun. O zaman, belli  $u, v \in \mathbb{Z}$  için  $d = ua + vb$  eşitliği geçerlidir.

**Kanıt:** Eğer  $a = 0$  ya da  $a = 1$  ise, kanıt kolay. Bundan böyle  $a > 1$  olsun.  $a$  üzerinden tümevarıma başvuracağız.  $b$ 'yi  $a$ 'ya bölelim (doğal sayılarda bölme yapıyoruz):  $b = aq + r$  ve  $0 \leq r < a$  olsun. Elbette  $a$  ve  $b$ 'yi bölen bir sayı hem  $a$ 'yı hem  $r$ 'yi böler. Öte yandan,  $a$  ve  $r$ 'yi bölen bir sayı da hem  $a$ 'yı hem  $b$ 'yi böler. Demek ki  $d$ ,  $a$  ve  $r$ 'nin de en büyük ortak bölenidir.  $r < a$  olduğundan, tümevarım varsayımına göre, belli  $u$  ve  $v$  tamsayıları için  $d = ua + vr$  eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla  $d = ua + vr = ua + v(b - aq) = (u - vq)a + vb$ . ■

$A \subseteq \mathbb{R}$  olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için  $0 < a < \varepsilon$  ilişkisini sağlayan bir  $a \in A$  elemanı varsa,  $0$ ,  $A$ 'nın bir sağdan yoğunlaşma noktasıdır. Kolaylık olsun diye bu yazıda "sağdan" sıfatını kullanmayacağız. Örneğin  $0, \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$  kümesinin yoğunlaşma noktasıdır, ama  $\mathbb{Z}$ 'nin değildir.

**Önsav 4.** Bir grubun yoğun olması için yeter ve gerek koşul  $0$ 'ın grubun yoğunlaşma noktası olmasıdır.

**Kanıt:** Gruba  $A$  diyelim. Önce  $A$ 'nın yoğun olduğunu varsayalım.  $\varepsilon > 0$  olsun. Demek ki  $0 < a < \varepsilon$  eşitsizliklerini sağlayan bir  $a \in A$  var, yani  $0$ ,  $A$ 'nın bir yoğunlaşma noktası. Bu kolaydı.

Şimdi  $0$ 'ın  $A$ 'nın bir yoğunlaşma noktası olduğunu varsayalım.  $x < y$  iki gerçel sayı olsun.  $x$ 'le  $y$  arasında  $A$ 'nın bir  $a$  elemanını bulacağız. Eğer  $x < 0 < y$  ise  $a = 0 \in A$  alabiliriz (Önsav 1). Bu eşitsizlikler doğru değilse ya  $0 < x < y$  ya da  $x < y < 0$  doğrudur.



$0 < x < y$  eşitsizliğini varsayalım, diğeri çok benzer.  $y - x > 0$  olduğundan, yoğunlaşma noktası tanımında  $\varepsilon = y - x$  alarak,  $0 < a < y - x$  eşitsizliklerini sağlayan bir  $a \in A$  elemanı bulabiliriz. Şimdi  $a, 2a, 3a, 4a, \dots$  gibi  $a$ 'nın katlarına bakalım. Bir zaman sonra bunlardan biri  $x$ 'i aşmak zorunda<sup>1</sup>.  $x$ 'i aşmayan en son sayı  $na$  olsun. Demek ki  $na \leq x < (n+1)a$ . Şimdi,  $(n+1)a = na + a \leq x + a < x + (y - x) = y$ . Demek ki  $x$  ile  $y$  arasında  $(n+1)a \in A$  sayısını bulduk (bknz. Önsav 1). □

<sup>1</sup> Eğer  $0 < a$  ise ve  $0 < x$  ise, o zaman  $x < na$  eşitsizliğini sağlayan bir  $n$  doğal sayısı vardır. Buna Arşimet özelliği denir.

**Önsav 5.** Eğer  $x \notin \mathbb{Q}$  ise,  $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$  yoğundur.

**Kanıt:**  $A = \mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$  olsun.  $n \in \mathbb{Z}$  için,  $nx - [nx]$  sayılarına bakalım. Burada  $[nx]$ ,  $nx$  sayısının tam kısmıdır. Demek ki  $0 \leq nx - [nx] < 1$ . Eğer  $n \neq m$  ise,  $nx - [nx] \neq mx - [mx]$  eşitsizliğini iddia edip kanıtıyoruz: Eğer  $nx - [nx] = mx - [mx]$  ise  $[nx] \neq [mx]$  ve  $x = \frac{m-n}{[nx]-[mx]} \in \mathbb{Q}$ , bir çelişki. Ayrıca  $nx - [nx] \in A$ . Demek ki  $A \cap [0, 1]$  kümesi sonsuz.

Şimdi  $\varepsilon > 0$  olsun.  $\varepsilon$ 'un  $[0, 1]$  aralığındaki tam katlarına, yani

$$0 < \varepsilon < 2\varepsilon < 3\varepsilon < 4\varepsilon < \dots < [1/\varepsilon]\varepsilon \leq 1$$

sayılarına bakalım. Bu  $n\varepsilon$ 'lerden sonlu sayıda olduğundan ve  $A \cap [0, 1]$  sonsuz olduğundan, öyle bir  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < n\varepsilon < \varepsilon$  vardır ki,  $n\varepsilon$  ve  $(n+1)\varepsilon$  arasında  $A$ 'dan sonsuz sayıda eleman vardır. Bunlardan ikisini alalım:  $a_1$  ve  $a_2$ . Şimdi  $|a_1 - a_2| \in A$  ve  $0 < |a_1 - a_2| < \varepsilon$ . Demek ki  $0$ ,  $A$ 'nın bir yoğunlaşma noktası. Önsav 4'e göre  $A$  yoğundur. □

**Sonuç 6.** Eğer  $x \notin \mathbb{Q}$  ise,  $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$  grubu  $z\mathbb{Z}$  biçiminde yazılamaz.

**Kanıt:** Yukarıda gördüğümüz üzere  $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$  yoğun bir küme, ama  $z\mathbb{Z}$  kümeleri yoğun değildir. □

**Sonuç 7.** Eğer  $y \neq 0$  ve  $x/y \notin \mathbb{Q}$  ise,  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ ,  $z\mathbb{Z}$  biçiminde yazılamaz. □

Sonuç 3 ve 7'den şu teorem çıkar.

**Teorem 8.**  $y \neq 0$  olsun.  $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$  kümesinin belli bir  $z \in \mathbb{Z}$  için  $z\mathbb{Z}$ 'ye eşit olması için gerek ve yeter koşul  $x/y$ 'nin kesirli sayı olmasıdır. □

**Teorem.** Bir grubun yoğun olmaması için gerek ve yeter koşul bir  $z \in \mathbb{R}$  için  $z\mathbb{Z}$ 'ye eşit olmasıdır.

**Kanıt:**  $z\mathbb{Z}$ 'nin yoğun olamayacağı bariz.

$A$  yoğun olmayan bir grup olsun. Eğer  $A = \{0\}$  ise  $z = 0$  işimizi görür. Bundan böyle  $A \neq \{0\}$  varsayımı altında çalışalım. Önsav 4'e göre,  $A$ 'da  $0$ 'dan büyük en küçük bir eleman vardır (neden?) Bu elemana  $z$  diyelim.  $z \in A$  olduğundan,  $z\mathbb{Z} \subseteq A$ . Şimdi  $A \subseteq z\mathbb{Z}$  ilişkisini kanıtlayalım.  $a \in A$  olsun.  $a = 0$  ise, elbette  $a = z \times 0 \in z\mathbb{Z}$ . Önce  $a$ 'nın pozitif olduğunu varsayalım.  $z, 2z, 3z, 4z$  elemanlarından biri  $a$ 'yı geçer.  $a$ 'yı geçmeyen en büyük  $nz$ 'yi alalım. Demek ki  $nz \leq a < (n+1)z$ . Dolayısıyla,  $0 < (n+1)z - a \leq z$ . Ama  $(n+1)z - a \in A$ , çünkü  $(n+1)z \in z\mathbb{Z} \subseteq A$ , dolayısıyla,  $z$ 'den küçüğeşit olduğundan, bu sayı  $z$ 'ye eşit olmalı. Demek ki  $(n+1)z - a = z$  ve  $a = nz \in z\mathbb{Z}$ . Eğer  $a < 0$  ise,  $-a \in z\mathbb{Z}$  ve  $a \in z\mathbb{Z}$ . ■