Altkümeler Kümesinin Yarı Özyapı Dönüşümleri

Veli Kırkdokuzoğlu

X herhangi bir küme olsun. $\wp(X)$, X'in altkümeler kümesi olsun. Sayı 2003-II, sayfa 24-25'te, $\wp(X)$'den $\wp(X)$'e giden ve her A, $B \in \wp(X)$ için (yani X'in her A ve B altkümeleri için),

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşulunu sağlayan φ eşleşmeleri sorulmuştu ve ardından da yanıtı verilip kanıtlanmıştı: Bu tür eşleşmeler bir elemanlı kümeleri bir elemanlı kümelere götürürler, ve eğer $f: X \to X$ fonksiyonu, her $x \in X$,

$$\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$$

eşitliğiyle tanımlanmışsa, o zaman f, X'ten X'e giden bir eşleşmedir ve her $A \in \wp(X)$ için,

$$\varphi(A) = f(A)$$

eşitliği geçerlidir. Bir başka deyişle yukardaki koşulu sağlayan $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ eşleşmeleri aslında X'ten X'e giden eşleşmeler tarafından belirlenirler.

Sayı 2003-II, sayfa 25'te çeşitli ödüller vadederek daha zor bir soru sorulmuştu.

Her A, $B \in \wp(X)$ için,

$$A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşulunu sağlayan tüm $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ eşleşmelerini bulun. Şimdi bu soruyu yanıtlıyoruz.

$\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ yukardaki koşulu sağlayan bir eşleşme olsun. φ'nin bir $f : X \to X$ eşleşmesi tarafından belirlendiğini kanıtlayacağız. Çeşitli aşamalardan geçeceğiz.

Sav 1. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = \emptyset$ eşitliğini sağlasın. Soruda verilen koşula göre A'nın her altkümesi boşkümenin bir altkümesine denk düşer. Demek ki A'nın sadece bir altkümesi vardır. Bundan da A'nın boşküme olduğu anlaşılır. □

Sav 2. $\varphi(X) = X$.

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = X$ eşitliğini sağlasın. O zaman A'yı içeren her altküme, φ altında, X'i içeren bir altkümeye, yani X'e gitmek zorunda. Demek ki A'yı içeren tek bir küme vardır, dolayısıyla $A = X$'tir. □

Sav 3. *$y \in X$ olsun. $A \subseteq X$ altkümesi, $\varphi(A) = \{y\}$ eşitliğini sağlasın. O zaman A'nın tek bir elemanı vardır.*

Kanıt: Soruda verilen koşula göre, A'nın her altkümesi $\{y\}$ kümesinin bir altkümesine denk düşer. Demek ki A'nın en fazla iki altkümesi vardır. A'nın tek bir altkümesi olsaydı, $A = \emptyset$ olurdu ve, Sav 1'e göre, $\{y\} = \varphi(A) = \varphi(\emptyset) = \emptyset$ olurdu, ki bu bir çelişkidir. Demek ki A'nın iki altkümesi vardır. Bundan da A'nın tek elemanlı olduğu anlaşılır. □

U kümesinı şöyle tanımlayalım:

$U = \{x \in X : \varphi(\{x\})$ tek bir elemanlı küme$\}$.

Şimdi de $f : U \to X$ fonksiyonunu tanımlayalım: Eğer $x \in U$ ise, $\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$ olsun. Sav 3'e göre, f'nin, U'dan X'e giden bir eşleme olduğu bariz. Önce U'nun X'e eşit olduğunu, sonra da φ'nin $f : X \to X$ eşleşmesi tarafından verildiğini kanıtlayacağız.

Sav 4. *$y \in X$ olsun. $x \in U$ elemanı $f(x) = y$ eşitliğini sağlasın. O zaman $\varphi(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{y\}$ eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = X \setminus \{y\}$ eşitliğini sağlasın. A'yı içeren her altküme, φ eşleşmesi altında, $X \setminus \{y\}$ kümesini içeren bir kümeye denk düşer. Demek ki A'yı içeren en fazla iki altküme vardır. Sav 2'ye göre $A \neq X$. Dolayısıyla A'yı içeren tam iki altküme vardır. Bu da, A'nın, belli bir $x \in X$ için, $A = X \setminus \{x\}$ olması demektir.

$z \in U$, $f(z) = y$ eşitliğini sağlasın. Eğer $z \neq x$ ise olacakları görelim: Her şeyden önce $\{z\} \subseteq X \setminus \{x\}$. Demek ki $\{y\} = \{f(z)\} = \varphi(\{z\}) \subseteq \varphi(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{y\}$, yani $y \in X \setminus \{y\}$, bir çelişki... Dolayısıyla $x = z \in U$ ve $f(x) = y$. □

Sav 5. *Eğer $A \subseteq X$ ise, $f(A \cap U) \subseteq \varphi(A) \subseteq f(A^c \cap U)^c$.*

Kanıt: $A \subseteq X$ olsun. $a \in A \cap U$ olsun. O zaman, $\{a\} \subseteq A$ ve $a \in U$ olduğundan, $\{f(a)\} = \varphi(\{a\}) \subseteq \varphi(A)$. Demek ki $f(a) \in \varphi(A)$. Bundan da $f(A \cap U) \subseteq \varphi(A)$ çıkar.

Şimdi $a \in A^c \cap U$ olsun. O zaman, $A \subseteq X \setminus \{a\}$ olduğundan ve $a \in U$ olduğundan, bir önceki sava göre, $\varphi(A) \subseteq \varphi(X \setminus \{a\}) = X \setminus \{f(a)\}$. Demek ki $f(a) \notin \varphi(A)$, yani $f(a) \in \varphi(A)^c$. Bundan da $f(A^c \cap U) \subseteq \varphi(A)^c$ çıkar, yani $\varphi(A) \subseteq f(A^c \cap U)^c$. □

Sav 6. *Eğer $A \subseteq X$ ise*, $\varphi(A) = f(A \cap U)$.

Kanıt: $f(A^c \cap U)^c = f(U \setminus (A \cap U))^c = (f(U) \setminus f(A \cap U))^c = (X \setminus f(A \cap U))^c = f(A \cap U)$ eşitliğinden ve Sav 5'ten istediğimiz çıkar. □

Artık istediğimizi kanıtlayabiliriz. Sav 6'da $A = X$ alırsak, $\varphi(X) = f(X \cap U) = \varphi(X \cap U) = \varphi(U)$ çıkar, yani $X = U$. Demek ki $U = X$ ve gene yukardaki sava göre $\varphi(A) = f(A \cap U) = f(A \cap X) = f(A)$. □□