



Doğu Üniversitesi Matematik Kulübü

Matematik Yarışması / 2. Bölüm

Doğu Üniversitesi Matematik Kulübü'nün üniversitenin öğretim üyelerinin de katkılarıyla düzenlediği liselerarası matematik yarışmasının Fen Lisesi öğrencilerine sorulan sorularını geçen sayımızda yayımlamıştık. Bu sayımızda bu soruların yanıtlarını ve liselilere sorulan soruları yayımlıyoruz.

Liselerarası Yarışma Soruları

1) Bir sayıyı 5, 7 ve 9 sayılarına böldüğümüzde sırasıyla 3, 5 ve 6 kalanlarını elde ediyoruz. Bu sayıların en küçüğü kaçtır?

2) x, y, z sıfırdan büyük birer tamsayı ve $3x + 2y + z = 97$ olduğuna göre, y 'nin en büyük değeri kaçtır?

3) $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ denkleminin **negatif** iki farklı kökü olması için m kaç olmalıdır?

4) $3f(x) + f(1-x) = x$ ise $f(3)$ değeri nedir?

5) $x + 7y = -3$ ise $16(x+y)^2 - 24(x^2 - y^2) + 9(x-y)^2$ kaçtır?

6) a, b, c farklı pozitif tamsayılar.

$$\frac{a+b}{b} > 4 \text{ ve } \frac{b+c}{c} < 5$$

olduğuna göre $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

7) Boyutları 160, 240, ve 320 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir depoya küp şeklindeki kutular yerleştiriliyor. Buna göre depoya en az kaç kutu yerleştirilebilir?

8) $a + 3/(4b) = 2$ ve $3/(4a) + b = 6$ olduğuna göre b/a oranı nedir?

9) $y = 2x^2 - 5x + 1$ ile $y = x^2 - 3$ parabollerinin kesim noktalarından geçen doğrunun denklemi nedir?

10) ab ve ba iki basamaklı sayılardır.

$$\frac{ab+ba}{ab-ba} = \frac{22}{3}$$

ise a kaçtır?

$$11) \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
 işleminin

sonucu nedir?

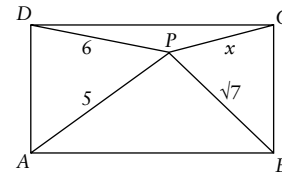
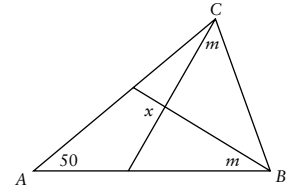
12) Aşağıdaki denklem sisteminin çözüm kümesinin boşküme olmaması için a kaç olmalıdır?

$$3x + y = 10$$

$$2x - 3y = 3$$

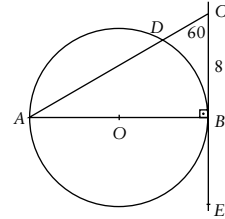
$$ax + (a-1)y = 19$$

13) Yandaki şekildedeki üçgende $AB = AC$ olduğuna göre x açısı kaç derecedir?



14) Yandaki şekildedeki ABCD dikdörtgeninde P herhangi bir nokta olmak üzere, verilenlere göre x nedir?

15) Yandaki şekilde, CE doğrusu B noktasında O merkezli çembere teğettir. $BC = 8$ ve $m(\angle DCB) = 60^\circ$ olduğuna göre AD/CD oranı nedir?



16) $M = \{x : 1/16 \leq 2^x < 15 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin üç elemanlı kaç altkümesi vardır?

17) $x + y = 2$ ve $x^3 + y^3 = 5$ ise $x^2 + y^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

18) 3'le çarpıldığında bir küp, 5'le çarpıldığında bir kare elde edilen en küçük doğal sayı kaçtır?

19) $P(x) = x^{\frac{n+10}{4}} + x^{n-3} + x - 1$ polinomunun derecesi en küçükken $P(-2)$ kaçtır?

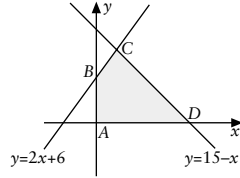
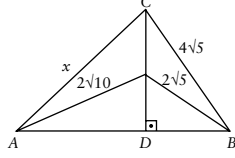
20) $\frac{x^2 - 4x + 4}{|x+2| - 3} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

21) A torbasında 4 beyaz ve 3 kırmızı, B torbasında da 3 beyaz ve 2 kırmızı top vardır. B torbasından bir top çekilip rengine bakılmadan A torbasına atılıyor. Sonra da A torbasından bir top çekiliyor. Çekilen topun kırmızı olma olasılığı nedir?

22) Bir torbada 1'den 10'a kadar numaralanmış on top vardır. Rastgele alınan iki topun numaralarının toplamının 15'den büyük olma olasılığı nedir?

23) $2/x = 3/y = 4/z$ ve $2x + 3y - 4z = -12$ olduğuna göre x , y ve z sayılarının aritmetik ortalaması nedir?

24) Yanda verilen şekilde x kaçtır?



25) Soldaki şekilde, $y = 15 - x$ ve $y = 2x + 6$ doğruları verilmiştir. ABCD dörtgeninin alanı kaç birim karedir?

26) $(x - 1/x^{1/2})^{12}$ ifadesinin açılımında sabit sayı kaçtır?

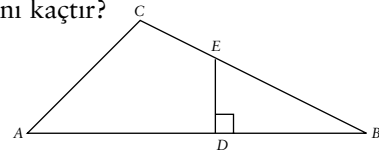
27) Gerçek sayılarda her x, y için $x * y = 2x + 2y - 4xy - 1/2$

olarak tanımlanan $*$ işleminde 1'in tersi var mıdır ve varsa kaçtır?

28) $27^{1/x} + 1 + 3^{3/x} > 252$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

29) $y + 7 = 3x$ ve $2y = x + 4$ doğruları arasındaki dar açı kaç derecedir?

30) Alttaki şekilde $m(\angle ACB) = 90^\circ$, $AD = BD$, $DE \perp AB$, $AB = 20$ ve $AC = 12$ birimdir. ADEC yamuğunun alanı kaçtır?



Fen Liseleri Yarışma Soru ve Yanıtları

1) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ ise $x^4 + 1/x^4$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm: $x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 + 1 = 3x^2 \Rightarrow x^2 + 1/x^2 = 3 \Rightarrow (x^2 + 1/x^2)^2 = 9 \Rightarrow x^4 + 2 + 1/x^4 = 9 \Rightarrow x^4 + 1/x^4 = 7$.

2) x, y pozitif tam sayılar ve $2x/5 + y/3 = 10$ olduğuna göre, x 'in alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm: Verilen eşitlikten $x = 5(30 - y)/6$ elde edilir. x 'in tamsayı olabilmesi için y 'nin 6'ya bölünmesi gerekir. y 'nin en küçük değeri 6 olur ve böylece $x = 20$ bulunur.

3) Z/5Z'de, $2x - 3y = 1$ ve $x + 2y = 2$ ise, $x + y$ kaçtır?

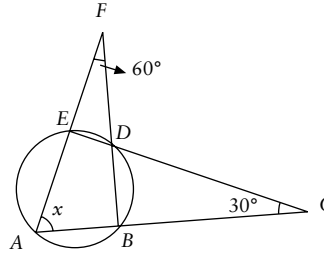
Çözüm: Denklem çözümü $y = 2 \times 3^{-1} = 2 \times 2 = 4$ bulunur (Z/5Z'te hesaplıyoruz), bu değer ikinci denklemde yerine konulduğunda $x = 4$ ve $x + y = 8 = 3$ bulunur.

4) Rakamlarının çarpımı 8 olan kaç dört basamaklı pozitif tamsayı vardır?

Çözüm: (1,1,1,8) dördlüsü için 4 farklı, (1,1,2,4) dördlüsü için 12 farklı, (1,2,2,2) dördlüsü için 4 farklı pozitif sayı yazılabilir, toplam olarak yazılacak farklı sayılar 20 tane.

5) On iki pozitif tam bölünen en küçük pozitif tamsayı nedir?

Çözüm: İki asal sayının üstlülerinin çarpımı alındığında istenilen sayı $2^3 \times 3^2 = 72$ 'dir. Fakat üç asal sayı ile düşünüldüğünde $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.



6) Yandaki şekilde x açısı kaç derecedir?

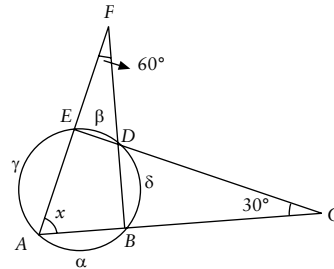
Çözüm: Aşağıdaki şekilden izleyelim.

$$\frac{m(\alpha) - m(\beta)}{2} = 60^\circ$$

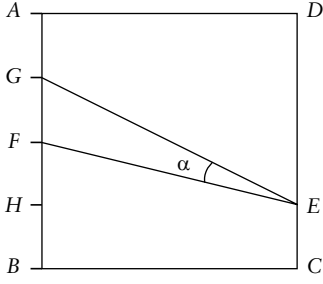
olduğundan, $m(\alpha) - m(\beta) = 120^\circ$. Ayrıca,

$$\frac{m(\gamma) - m(\delta)}{2} = 30^\circ$$

olduğundan, $m(\gamma) - m(\delta) = 60^\circ$. Öte yandan $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) + m(\delta) = 360^\circ$.



Bu üçünden $m(\delta) + m(\beta) = 90^\circ$ çıkar. Demek ki x açısının gördüğü yayın ölçüsü 90° dir, yani $x = 45^\circ$.



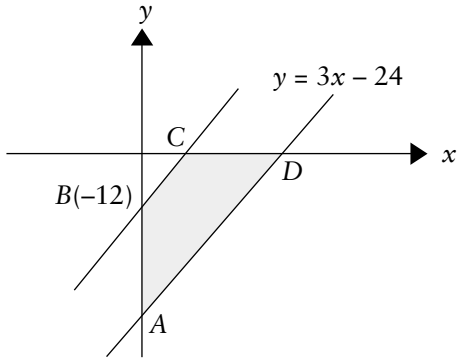
7) Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde $AG = GF = FH = HB = EC$ olduğuna göre $\tan(\alpha)$ değeri nedir?

Çözüm: $\beta = m(\text{HEG})$, $\gamma = m(\text{FEG})$ olsun. Yukarıdaki şekilden takip edelim. $\alpha = \beta - \gamma$ olduğundan,

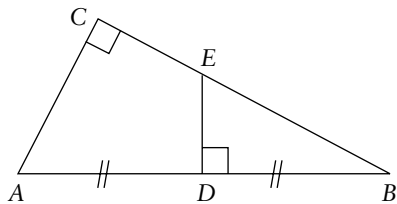
$$\tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} = \frac{\frac{2}{4} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{16}} = 2/9.$$

8) AD doğrusunun denklemi $y = 3x - 24$ olarak verilmiştir. $B(0, -12)$ noktasından AD'ye çizilen paralel, x eksenini C noktasında kesiyor. ADCB yamuğunun alanı kaç birim karedir?

Çözüm: $C(4, 0)$, $D(8, 0)$, $A(0, -24)$ olduğundan, dik üçgen alanları farkı : $8 \times 24 / 2 - 4 \times 12 / 2 = 72$ birim karedir.

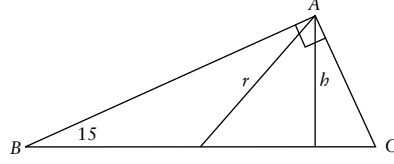


24) Aşağıdaki şekilde $m(\text{ACB}) = 90^\circ$, $AD = BD$, $DE \perp AB$, $AB = 20$ ve $AC = 12$ birimdir. ADEC dörtgeninin alanı kaç birim karedir?



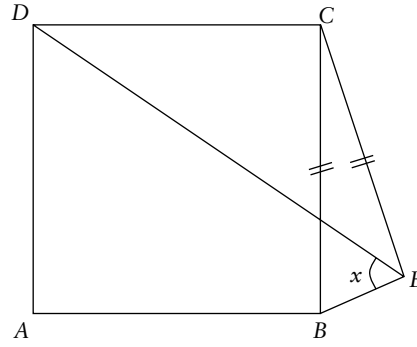
Çözüm: $AB = 20$, $AC = 12$ ve $CB = 16$ eşitliklerinden $\text{Alan}(\text{ABC}) = 96$ çıkar. Benzerlik oranı $10/16 = 5/8$ 'den $\text{Alan}(\text{EDB}) = 75/2$ çıkar. Demek ki yamuğun alanı $96 - 75/2 = 117/2$ birim karedir.

10) Aşağıdaki şekilde bir açısı 15° olan dik üçgen için ABC'nin alanı 128 cm^2 ise BC kaçtır?



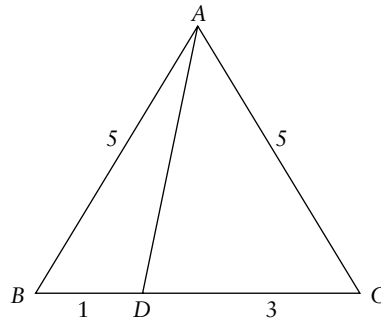
Çözüm: BC çaplı çemberden $r = 2b$, $BC = 4b$ çıkar ve $4b^2/2 = 128$, yani $b = 8$ ve $BC = 32$ bulunur.

11) ABCD kare ve $CB = CE$ ise DEB açısı kaç derecedir?



Çözüm: D, B, E noktaları C merkezli çember üzerinde olup x çevre açı olur ve aynı yayı gören merkez açı 90° dir. Yani $x = 45^\circ$.

12) $AB = AC = 5$, $BD = 1$ ve $DC = 3$ ise AD uzunluğu kaçtır?



Çözüm: ABC üçgeni ikizkenar olduğundan $AD^2 = AB \times AC - DB \times DC = 25 - 3 = 22$ olacaktır. Yani $AD = \sqrt{22}$ olur.

13) Bir kübün kaç simetri düzlemi vardır?

Çözüm: Köşegenleri birleştiren ve kenarları ortaltayan düzlemler bulunursa 9 tane simetri düzlemi bulunur.

14) Pergel ve cetvelle (işaretsiz) 36 derecelik açının çizilebileceği, 20 derecelik açının çizilemeyeceği bilindiğine göre $5^\circ, 9^\circ, 10^\circ, 18^\circ, 56^\circ$ derecelerden kaç tane pergel ve cetvelle çizilebilir?

Çözüm: Pergel cetvelle bir açıyı iki eşit parçaya bölmek mümkün olduğundan, 36 derecelik açıdan 18 ve 9 derecelik açılar çizilebilir. Aynı düşünceyle, 20 derecelik açının çizilemeyeşinden diğerlerinin çizilemeyeceği görülür.

$$15) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{10} - 3 - \sqrt{6} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = ?$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{5}\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{5} - \sqrt{3}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

16) $f(x) = x/(x+1)$ olduğuna göre, $f(x-1)$ 'in $f(x)$ türünden değeri nedir?

Çözüm: $f(x-1) = (x-1)/x$ eşitliğinde $y = x/(x+1)$ alındığında, $y \neq 1$ için, $x = y/(1-y)$ olacaktır. Demek ki,

$$f(x-1) = \frac{x-1}{x} = \frac{\frac{y}{1-y} - 1}{\frac{y}{1-y}} = \frac{2y-1}{y}.$$

$y = f(x)$ olduğundan

$$f(x-1) = \frac{2f(x)-1}{f(x)}$$

bulunur.

17) $2003^{2003} \equiv x \pmod{9}$ ve $0 \leq x < 9$ ise, x kaçtır?

Çözüm: $2003 \equiv 5 \pmod{9}$ ve $5^5 \equiv 2 \pmod{9}$ ve $5^6 \equiv 1 \pmod{9}$ olduğundan,
 $2003^{2003} \equiv (5^6)^{333} \times 5^5 \equiv 2 \pmod{9}$.

18) $(ab)^2 + (cd)^2 = (ba)^2$ eşitliğini sağlayan $(ab), (ba), (cd)$ iki rakamlı sayıların toplamı nedir?

Çözüm: $(cd)^2 = (ba)^2 - (ab)^2 = ((ba) - (ab))((ba) + (ab)) = (9 \times (b - a))(11 \times (b + a))$ eşitliklerinden, $b - a = 1$ ve $b + a = 11$ çıkar. Demek ki $b = 6, a = 5$. Dolayısıyla $(cd) = 33$ ve $(ab) + (ba) + (cd) = 56 + 65 + 33 = 154$.

19) $2^{\sqrt{x}} + 2^{3-\sqrt{x}} = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $2^{\sqrt{x}} + 8/2^{\sqrt{x}} = 6$ eşitliğinde $u = 2^{\sqrt{x}}$ alındığında $u^2 - 6u + 8 = 0$ elde edilir. Bunun iki çözümü vardır: $u_1 = 2$ ve $u_2 = 4$. Demek ki $2^{\sqrt{x}}$ ya 2 'ye ya da 4 'e eşit. Yani $\sqrt{x} = 1$ ya da 2 , yani $x = 1$ ya da 4 .

20) $5^{32} - 1$ sayısı 2^n sayısına bölünüyorsa, n en çok kaç olabilir?

Çözüm: $5^{32} - 1 = (5^{16} + 1)(5^{16} - 1) = (5^{16} + 1)(5^8 + 1)(5^8 - 1) = (5^{16} + 1)(5^8 + 1)(5^4 + 1)(5^4 - 1) = (5^{16} + 1)(5^8 + 1)(5^4 + 1)(5^2 + 1)(5^2 - 1) = (5^{16} + 1)(5^8 + 1)(5^4 + 1)(5^2 + 1)(5 + 1)(5 - 1)$ eşitliklerinin solundaki çarpanlara teker teker bakalım. İlk beş çarpan 2 'ye bölünür ama 4 'e bölünmez, sonuncusu sadece 4 'e bölünür. Demek ki $5^{32} - 1$, tam olarak 2 'nin 7 nci gücüne bölünür.

21) $64 + 16x - 4x^2 - x^3 > 0$ eşitsizliğini sağlayan pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?

Çözüm: $0 > x^3 + 4x^2 - 16x - 64 = x(x^2 - 16) + 4(x^2 - 16) = (x + 4)(x^2 - 16) = (x + 4)^2(x - 4)$ eşitsizliğinden, $x = 1, 2, 3$ bulunur. Demek ki toplam $1 + 2 + 3 = 6$ 'dır.

22) $Z/11Z$ 'de $f(x) = 7x + 5$ ve

$$(g \circ f^{-1})(x) = x^2 + 3x + 1$$

ise $g(7)$ kaçtır?

Çözüm: $Z/11Z$ 'de hesaplıyoruz. $f(x) = 7x + 5$ olduğundan, $x = 7^{-1}(f(x) - 5)$, yani,

$$f^{-1}(x) = 7^{-1}(x - 5).$$

Dolayısıyla, $x^2 + 3x + 1 = g(f^{-1}(x)) = g(7^{-1}(x - 5))$.

Bunu $x = 54$ 'e (yani -1 'e) uygularsak,

$$\begin{aligned} g(7) &= g(7^{-1}(54 - 5)) = 54^2 + 3 \times 54 + 1 \\ &= (-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 = 10 \end{aligned}$$

buluruz.

23) $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde tanımlı olan birleşme özelliğine sahip $*$ işlemi aşağıdaki tabloda verilmiştir. $a * b^{-1} * x = c^{-1}$ olduğuna göre x nedir?

*	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

Çözüm: Tablodan etkisiz elemanın d olduğu görülür. Demek ki $c^{-1} = e$ ve $a^{-1} = b$. Verilen eşitliğin her iki tarafını da (soldan veya sağdan, farketmez, işlemin değişme özelliği var) $b * b$ ile çarparsak, $x = a^{-1} * b * c^{-1} = b * b * c^{-1} = e * c^{-1} = e * e = a$ bulunur.

24) x, y, z pozitif tamsayılar ve

$$A = 5x + 3 = 3y + 2 = 9z + 8$$

olduğuna göre, A 'nın 100 ile 200 arasında alabileceği en büyük değeri kaçtır?

Çözüm: Verilenlerden,

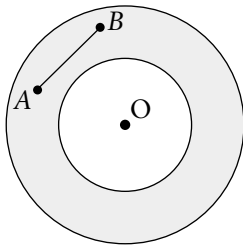
$$A = 5(x - 1) + 8 = 3(y - 2) + 8 = 9z + 8$$

ç çıkar. Demek ki $A - 8$ sayısı 5, 3 ve 9'un ortak katıdır. Bunun tersi de doğrudur: Eğer $A - 8$ sayısı 5, 3 ve 9'un ortak katıysa, sorudaki eşitliği sağlayan x, y ve z kolaylıkla bulunur. OKEK(3,5,9) = 45'ten $A = 45k + 8$ çıkar. İstenilen aralıkta en büyük değer $A = 45 \times 4 + 8 = 188$ olur.

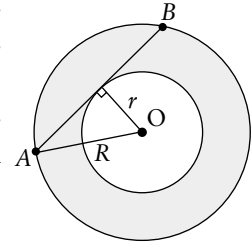
25) $8100 \times a = b^5$ eşitliğini sağlayan a ve b pozitif tam sayıları için $a + b$ 'nin alacağı en küçük değer kaçtır?

Çözüm: a 'nın ya da b 'nin alabileceği en küçük değeri bulmak yeterli. $8100 = 3^4 \times 2^2 \times 5^2$ olduğundan, a 'nın alabileceği en küçük değer $3 \times 2^3 \times 5^3 = 3000$ olmalıdır ve b 'nin alabileceği en küçük değer $2 \times 3 \times 5 = 30$ olmalıdır. Dolayısıyla $a + b$ 'nin alabileceği en küçük değer 3030'dur.

26) Eşmerkezli çemberlerin sınırladığı ve alanı $16\pi \text{ cm}^2$ olan halka bölgede hareket eden bir AB çubuğunun boyu en fazla kaç cm olabilir?



Çözüm: Halkanın alanı 16π olduğu gibi, aynı zamanda $(R^2 - r^2)\pi$ 'dir de. Demek ki $R^2 - r^2 = 16$. Pisagor Teoremi'nden AB 'nin yarısının 4 olduğu anlaşılır. Demek ki $AB = 8$.



27) $|x + 2| - |x - 1| < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $x \geq 1$ için, $1 > |x + 2| - |x - 1| = x + 2 - (x - 1) = 1$ ve çözüm yok.

$-2 \leq x < 1$ için, $1 > |x + 2| - |x - 1| = x + 2 - (1 - x) = 2x + 1$, yani $x < 0$. Demek ki bu durumda çözüm kümesi $[-2, 0)$.

$x < -2$ için, $1 > |x + 2| - |x - 1| = -x - 2 - (1 - x) = 2x - 3$, yani $x < 2$. Demek ki bu durumda çözüm kümesi $(-\infty, -2)$.

Sonuç olarak çözüm kümesi $(-\infty, -2) \cup [-2, 0)$, yani $(-\infty, 0)$.

28) $2x^3 - 6x^2 + 4x - 3 = 0$ denkleminin (gerçel ya da karmaşık) kökleri a, b ve c olduğuna göre $a^2 + b^2 + c^2$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm: Verilenlere göre $2x^3 - 6x^2 + 4x - 3 = 2(x - a)(x - b)(x - c)$. Sağ tarafı açarak,

$$a + b + c = 3$$

$$ab + ac + bc = 2$$

$$abc = 3/2$$

buluruz. Demek ki $9 = (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + ac + bc) = (a^2 + b^2 + c^2) + 4$, yani $a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 4 = 5$.

29) $f(3x - 2) = 3x + 2$ ve $g(x) = x^2 + 2$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(f^{-1} \circ g)(3)$ kaçtır?

Çözüm: $(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(11)$ olduğundan, $f^{-1}(11)$ 'i bulmalıyız.

$f(x) = f(3(x/3 + 2/3) - 2) = 3(x/3 + 2/3) + 2 = x + 4$, demek ki $f^{-1}(x) = x - 4$ ve $f^{-1}(11) = 7$.

30) x ve y gerçel sayılar olmak üzere

$$xy + 2y = 12$$

$$y^{-1} + (x+2)^{-1} = 2/3$$

olduğuna göre $x + y$ kaçtır?

Çözüm: Birinci eşitlikten $x + 2 = 12/y$ bulunur. Bunu ikinci eşitliğe yerleştirdiğimizde, $1/y + y/12 = 2/3$ buluruz, yani $y^2 - 8y + 12 = 0$. Bunun iki çözümü vardır: $y = 2, 6$. Bunlara $x = 12/y - 2$ tekabül eder, yani $x = 4, 0$. Her iki durumda da $x + y = 6$ bulunur. ♦