

Yarı Özyapı Dönüşümleri

Tolga Karayayla

ODTÜ Matematik Bölümü öğrencisi

Geçen sayıda sorulan soruyu buraya almadan önce bir çizgenin özyapı dönüşümünün tanımını anımsatalım. Bir çizgenin özyapı dönüşümü, her şeyden önce o çizgenin noktaları arasında bir eşleşmedir. Ayrıca, eğer eşleşmeye f adını verirsek, eşleşmenin her x, y noktası için x ve y bağıntılıdır $\Leftrightarrow f(x)$ ve $f(y)$ bağıntılıdır koşulunu sağlaması gerekmektedir. Yukardaki koşulda \Leftrightarrow eklemesi \Rightarrow eklemiyle değiştirdiğimizde elde ettiğimiz kavrama **yarı eşyapı dönüşümü** diyelim. Geçen sayıda bu konuda iki soru sorulmuştu:

Soru 1. Eğer çizge sonluysa her yarı özyapı dönüşümünün bir özyapı dönüşümü olduğunu kanıtlayın.

Soru 2. Öyle bir çizge bulun ki, özyapı dönüşümü olmayan yarı özyapı dönüşümleri olsun.

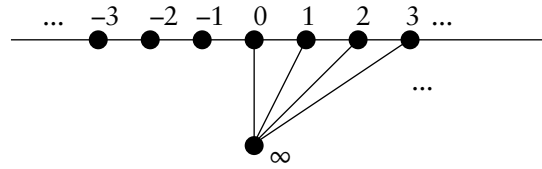
Birinci Sorunun Yanıtı. f , sonlu bir çizgenin bir yarı özyapı dönüşümü olsun. a ve b çizgenin iki noktası olsun. $f(a)$ ve $f(b)$ noktalarının bağıntılı olduklarını varsayalım. a ve b noktalarının bağıntılı olduklarını kanıtlayacağız. Çizge sonlu olduğundan, f 'nin belli bir gücünü alırsak, yani f^n 'yi kendisiyle yeterince bileşimini alırsak birim fonksiyonu buluruz. Demek ki, belli bir $n > 0$ tamsayısı için $f^n = \text{Id}$, yani her x noktası için $f^n(x) = x$ eşitliği geçerli. Şimdi, $f(a)$ ve $f(b)$ bağıntılı olduklarından ve f bir yarı eşyapı dönüşümü olduğundan, $f^2(a)$ ve $f^2(b)$ noktaları da bağıntılıdır. Aynı nedenden $f^3(a)$ ve $f^3(b)$ noktaları da bağıntılıdır. Böyle gide gide $f^n(x)$ ve $f^n(y)$ noktalarının da bağıntılı olduklarını görürüz.

Ama $f^n(x) = x$ ve $f^n(y) = y$. Demek ki x ve y noktaları da bağıntılıymış.

İkinci Sorunun Birinci Yanıtı. Birinci sorudan dolayı çizgenin nokta sayısı sonsuz olmalı.

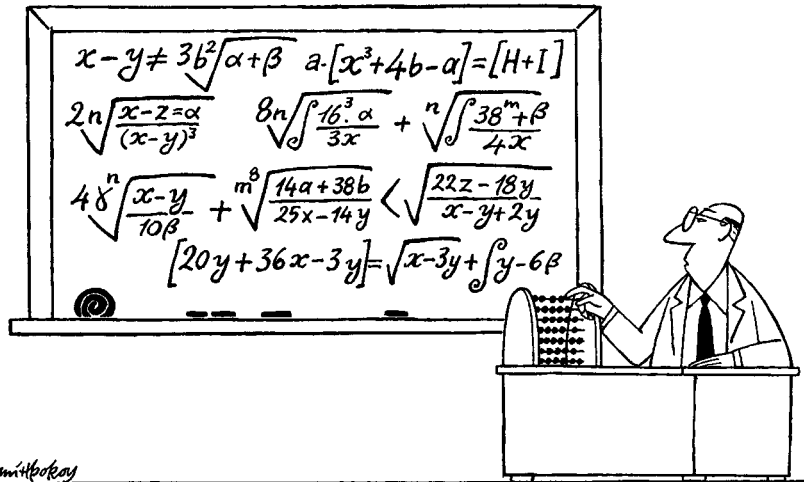
$$A = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

olsun. A bir çizgenin noktalar kümesi olacak. Her sayı kendisinden önceki ve sonraki sayıyla bağıntılı olsun. Ayrıca ∞ elemanı da sadece doğal sayılarla bağıntılı olsun. Yani çizgemiz şöyle olsun:



Şimdi, $f(n) = n + 1$ ve $f(\infty) = \infty$ olsun. f bir yarı özyapı dönüşümüdür ama 0∞ bağıntısı yüzünden özyapı dönüşümü değildir.

İkinci Sorunun İkinci Yanıtı. Noktalar kümesi \mathbb{R} gerçel sayılar kümesi olsun. Eğer $x + y < x^2$ ise x ve y noktaları bağıntılı olsun. $f(x) = 2x$ bir yarı özyapı dönüşümüdür ama özyapı dönüşümü değil, çünkü 2 ve 3 bağıntılı, ama 1 ve $3/2$ bağıntılı değil. ♦



Kamillekay