Abra kadabra

Murat Kipel*
mkipel@treda.com.tr

Yeni Abrakadabra: Küp Kökü. Çevrenizdeki insanları bilgisayar gibi hızlı çalışan bir beyniniz olduğuna inandırmak istemez miydiniz? İşte size küçük bir numara.

Arkadaşınızın eline bir hesap makinesi verin ve kendi seçeceği iki basamaklı bir sayının küpünü almasını isteyin. Sonucu size söylesin. Siz de bir iki saniye içinde bu sayının küp kökünü bularak söyleyin. Nasıl yaparsınız?

Eski Abrakadabra: Fibonacci Dizileri. Fibonacci dizilerini bilirsiniz, son iki sayımızda sözünü etmiştik. $n > 2$ için dizinin n'inci sırasındaki her sayı hemen önceki iki sayının toplamıdır. İlk iki sayıyı bilirseniz Fibonacci dizisini bu iki sayıdan başlayarak inşa edebilirsiniz. Örneğin, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... dizisi ilk iki sayısı 1 olan bir Fibonacci dizisidir. İlk iki sayıya Fibonacci dizisinin **kök sayısı** denir.

Başka kök sayılarıyla da Fibonacci dizileri oluşturulabilir. Örneğin rastgele olarak 10, 13 ikilisiyle bir Fibonacci dizisi oluşturalım:

10, 13, 23, 36, 59, 95, 154, 249, 403, 652, …

Şimdi numaramıza geçelim.

Birine rastgele iki sayı seçmesini söylüyorsunuz. Daha sonra bu sayıları kök olarak alan on elemanlı bir Fibonacci dizisini bir kağıda altalta yazmasını istiyorsunuz. İddianız kâğıttaki bu on sayıyı birkaç saniye içinde akıldan toplayabileceğiniz olacak.

Bunu yapmanın pratik bir yolu var mı?

Yanıt. Dizinin 7inci elemanını seçip 11'le çarparız, bulacağımız sonuç bize dizinin toplamını verir. Bir sayıyı akıldan 11'le çarpmanın birçok kolay yolunu bulabilirsiniz.

Neden böyle?

İlk iki sayı a_1 ve a_2 olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_1 + a_2\\
a_4 &= a_2 + a_3 = a_1 + 2a_2\\
a_5 &= a_3 + a_4 = 2a_1 + 3a_2\\
a_6 &= a_4 + a_5 = 3a_1 + 5a_2\\
&....
\end{aligned}$$

Genel formül ne? İlk iki kök sayısı 1 ve 1 olan Fibonacci dizisine $(f_n)_n$ dersek (ilk örneğimiz) o zaman, her $n \geq 3$ için,

$$a_n = f_{n-2}a_1 + f_{n-1}a_2$$

eşitliği geçerlidir. Bunu tümevarımla kanıtlayalım. $n = 3$ ise, $f_1 = f_2 = 1$ olduğundan, eşitlik doğru. Eğer $n = 4$ ise, $f_2 = 1$ ve $f_2 = 2$ olduğundan, eşitlik gene doğru. Şimdi $a_n = f_{n-2}a_1 + f_{n-1}a_2$ ve $a_{n+1} = f_{n-1}a_1 + f_na_2$ eşitliklerini varsayıp, $a_{n+2} = f_na_1 + f_{n+1}a_2$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_n + a_{n+1}\\
&= (f_{n-2}a_1 + f_{n-1}a_2) + (f_{n-1}a_1 + f_na_2)\\
&= (f_{n-2} + f_{n-1})a_1 + (f_{n-1} + f_n)a_2\\
&= f_na_1 + f_{n+1}a_2.
\end{aligned}$$

İstediğimizi kanıtladık.

Eğer $f_{-1} = 1$, $f_0 = 0$ koyarsak, formülümüz $n = 1$ ve 2 için de doğru olur.

Bu arada $a_7 = f_5a_1 + f_6a_2 = 5a_1 + 8a_2$ eşitliğine dikkatinizi çekerim, birazdan gerekecek.

Şimdi $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ sayısını hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} (f_{i-2}a_1 + f_{i-2}a_2)\\
&= (\sum_{i=1}^{n} (f_{i-2})a_1 + (\sum_{i=1}^{n} f_{i-1})a_2\\
&= (1 + \sum_{i=1}^{n-2} f_i)a_1 + (\sum_{i=1}^{n-2} f_i + f_{n-1})a_2\\
&= a_1 + f_{n-1}a_2 + (\sum_{i=1}^{n-2} f_i)(a_1 + a_2).
\end{aligned}$$

Eğer $n = 10$ alırsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} a_i &= a_1 + 34a_2 + (1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21)(a_1 + a_2)\\
&= 55a_1 + 88a_2 = 11(5a_1 + 8a_2) = 11a_7
\end{aligned}$$

buluruz, ki bu da bizim kanıtlamak istediğimizdi.

İlk on sayı yerine başka bir ilk k sayı alsaydık böyle güzel bir numara yapabilir miydik? ♣

* Treda Bilişim Teknolojileri A.Ş., yazılım uzmanı.