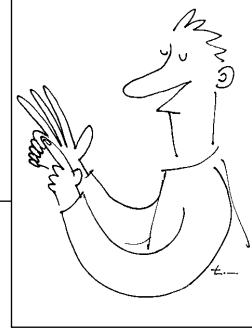


Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Doğal Sayılar Ne Kadar Doğaldır?



Kapak konumuz sayılar. Sayıları anlayacağız.

“Sayıları anlamak” deyince, sanki bizim dışımızda bir yerde, çok belirgin ve fiziksel bir biçimde sayılar var da biz onları anlamak istiyoruz gibi bir anlam çıkabilir.

“Anlamak” üzerine düşünelim biraz. Anlamak ne demektir? Neyi, nasıl ve ne dereceye kadar anlayabiliriz? Anlama çeşitleri nelerdir? Bu tür sorularla ilgileneceğiz bu yazıda. Derin felsefe... Daha derini yok! Ya da ben bilmiyorum.

× × ×

“Sayıları anlamak”la “zürafaları anlamak” arasında bir ayrım var mı? Var gibi... Zürafalar orada. Karşımdalar. Otluyorlar, geziniyorlar, koşuyorlar. Görüyorum onları. Zürafaların sindirim sistemini anlamaya çalışabilirim örneğin. Çünkü o sindirim sistemi orada. Benden bağımsız bir biçimde var.

Oysa sayılar ortalıkta görünmüyorlar. Ben hiç beş görmedim hayatımda, bundan sonra da görmeyeceğim. Şimdiye kadar kimse “çok güzel bir beş geçti kapımın önünden” dememiştir, çünkü beş geçmez, beş yürümez, beş kırılmaz, beş uçmaz, beş susamaz, acıkmaz, yaşlanmaz, ölmez... Beş hiçbir şey yapmaz! Oysa zürafa bir şeyler yapar...

Zürafa orada. Bu çok belli. Oysa beş'in ne kadar orada olduğu pek belli değil.

Zürafayı alır karşıma incelerim, ama ya beş'i?

× × ×

Her ne kadar “beş zürafa” bir anlam ifade ediyorsa da, tek başına “beş”in ne anlama geldiği o kadar belli değil.

“Beş zürafa” bir anlam ifade ediyor mu dedim? Yanıldım galiba... “Bir zürafa”nın anlamı ve hatta fiziksel varlığı bile tartışılabilir, çünkü o “bir zürafa” durmadan değişmektedir. O durmadan değişen zürafaya sanki hiç değişmemiş, sanki sabit bir varlık gibi “zürafa” denmesi tam gerçeği yansıtmaz. Her zürafa bir diğerinden farklıdır ve her zürafa her an değişir. “Bir zürafa” değil, durmadan değişen

zürafalar vardır! Hatta daha doğmamış zürafalar bile vardır! Dolayısıyla aslında “zürafa” da bir kavramdır. “zürafa”, “zürafa” adını verdiğimiz durmadan değişen varlıkların ortak adıdır. “Zürafa” sanıldığından daha soyut bir şeydir.

Peki zürafa bir kavramsa, “beş zürafa” ne demektir? Aynı kavramdan beş tane olur mu? Galiba “beş zürafa”, “zürafa kavramının kapsamına giren varlıkların beşi” anlamına geliyor... O varlıklar da durmadan değiştiklerinden tümüyle kavrayamayacağımız, bütünüyle algılayamayacağımız şeyler. Birini bile kavrayamazken biz beşinden sözediyoruz...

Hayvan zürafa ölür, kavram zürafa ölmez. Hayvan zürafa durmadan değişir, kavram zürafa hiç değişmez. Hayvan zürafayla kavram zürafayı birbirine karıştırmamak lazım. Kavram zürafa beş'e çok daha yakın.

Konu gittikçe karmaşıklaşıyor ve içinden çıkılmaz bir hal alıyor.

× × ×

Neyse ne!.. Sonuç olarak zürafa ne de olsa zürafadır. Oradadır. Yadsınamaz bir biçimde, ya da çok zor yadsınır bir biçimde... Oysa sayılar bir zürafa kadar orada değiller.

Sayıları göremiyoruz diye sayılar yok diyebilir miyiz? Belli ki sayılar var. Bakın, sözünü ediyorum şimdi ve anlaşıyoruz. Sayılar, hiçbir yerde olmasalar beynimizde varlar. Zihinsel bile olsalar varlar. Zürafalarla aynı düzlemde değil belki ama “beş” de var. Descartes yazsaydı bu satırları, “beş'i düşünüyorum demek ki beş var” derdi. Haklı olarak...

Çoğu insanın bir elinde beş parmak vardır. Bunu herkes bilir. Demek ki hepimizin uzlaştığı bir beş kavramı var. İçinde “beş” geçen bu önermeyi hepimiz anlıyoruz ve doğru buluyoruz. Demek ki “beş”e ortak bir anlam verebiliyoruz. Tüm insanların beş'e ortak bir anlam vermeleri, herhalde ancak beş'in bizden bağımsız bir biçimde var olmasıyla olabilir.

Kaldı ki, beş kavramı birbiriyle hiç ilişkisi olmamış uygarlıklar tarafından birbirinden bağımsız olarak da bulunmuştur. Demek ki bizim dışımızda bir yerde var bu “beş”... Öyle olmalı... Var ki biraz düşünebilen her uygarlık belli bir seviyeye gelince beş’i kavrayor ve kavram olarak benimsiyor.

Akıllı uzaylılar varsa, onlar da beş kavramını bir süre sonra yaratırlar/bulurlar. Mutlaka... Öyle sanıyorum. Beş kavramı sadece dünyamıza özgü değil. Tüm evrende, doğada, her yerde olan bir kavram.

× × ×

Galiba “beş” salt zihinsel değil... O da orada bir yerde. Tam nerede bilmiyorum ama oralarda bir yerlerde bir “beş” olmalı. Görmesek de, dokunmasak da o beş bizim beşimizdir. Beş’in kendisi olmasa (“beş’in kendisi” ne demekse!) bile beş kavramı benim dışımda bir yerde var. Sadece düşünce olarak var – başka türlü var olamaz – ama var... (Benden bağımsız düşünce olabilir mi doğada? Felsefi soruların şahı!) Var ki hepimiz anlaşıyoruz beş konusunda.

Belki de doğa bana “beş beş beş” diye fısıldıyor ve ben beynimi kullanarak o beş kavramını yaratıyorum/buluyorum.

Sayıları anlamak gibi son derece masum bir uğraş bizi varlık ve yokluk gibi çok derin felsefi sorulara götürdü...

× × ×

Sorularıma tam yanıt veremedim. Birtakım çıkarımlarda bulunup sayıların orada bir yerde oldukları sonucunu çıkardım ama bu çıkarımlarımdan bende pek emin değilim, yüzde yüz ikna olmadım, ben ikna olsam da sizi ikna edemiyor olabilirim. Matematik dünyasından çok çıktık...

× × ×

Yanıtını bulamadığımız sorularla zaman harcamayıp devam edelim...

Doğada var ya da yok, beş’i anlamak istiyorum. Beş’i anlamak için önce beş’in ne olduğunu bilmeliyim. Yani beş’i tanımlamalıyım.

Bir deneme yapalım: Beş’i bir elin parmak sayısı olarak tanımlayalım.

Biraz demagoji yapıp bu tanıma karşı çıkabilirim ama çıkmayacağım. Bir an için bu tanıma kabul edip beş’i anlamaya çalışalım...

Beş’i tanımladıktan sonra beş’i anlamak ne demektir sorusu geliyor akla. Beş’in nesini anlayacağız? Beş’i tek başına değil, beş’in öbür sayılarla olan ilişkisini anlamak istiyorum. Örneğin $5 + 3$ ’ü bulmak istiyorum. “Üç parmak”ı da tanımladığımızı varsayarak, $5 + 3$ sayısını beş parmağın yanına öbür elin üç parmağı daha geldiğinde elde edilen parmak sayısı olarak tanımlayabiliriz.

Nitekim beş parmağımızın yanına öbür elinizin üç parmağını getirseniz sekiz parmak elde edersiniz. Deneyin göreceksiniz. Tekrar tekrar deneyin, hep aynı sonucu, “sekiz parmak” sonucunu alacaksınız. Ancak bir sorun var burada. Deneyerek gördüğünüzü kanıtlayamazsınız. Beş elmayla üç elmayı yanyana koyduğunuzda sekiz elma elde edeceğinizi hiçbir zaman kanıtlayamazsınız. Çünkü önermeniz deneye bağlı. O deneyin sonsuza kadar aynı sonucu vereceğini kanıtlayamazsınız. Dikkatinizi çekerim: Beş elmayla üç elmayı yanyana koyarsanız sekiz elma elde etmezsiniz demiyorum, sadece bu önermenizi kanıtlayamazsınız diyorum. Fiziksel deneyler matematiksel anlamda kanıtlanamazlar. “Beş elmanın yanına üç elma daha koyarsam sekiz elma elde ederim” önermesi olsa olsa (yapılmış) her bir deney için kanıtlanır, tüm genelliğiyle, gelecekte yapılacak deneyler için kanıtlanamaz. “Böyle gelmiş böyle gider” geçerli bir kanıt yöntemi değildir. En azından matematikte...

Oysa matematik kanıtları. $5 + 3 = 8$ eşitliğini kanıtlamalıyız... Kanıtlamadan olmaz.

× × ×



Ayrıca “beş”i bir eldeki parmak sayısı olarak tanımlasam, çok çok büyük sayıları nasıl tanımlayacağım? Hatta genel olarak “sayı” kavramının kendisini nasıl tanımlayacağım? Bir, iki, üç, dört, beş tanımlandı. Altıyı da tanımladık, yediyi de... Günün birinde durmam gerekecek, sonsuza kadar sayı tanımlayacak değilim ya... Sayıları teker teker tanımlamakla sayı kavramını tanımlamak arasında da bir ayırım vardır.

× × ×

Ne yapacağız?

Önce şunu yapacağız: Günlük dilde kullandığımız ve aslında ne demek olduğunu bilmediğimiz beş’le daha sonraki yazılarda tanımlayacağımız beş’i birbirinden ayıracağız. İkincisi matematiksel beş olacak. Matematiksel beş’in sizin elinizin parmak sayısı ile hiçbir ilgisi olmayacak, ya da çok az ilgisi olacak.

Yepyeni bir beş kavramı tanımlayacağız. Matematiksel olarak...

Nasıl yapacağız bunu?

Nasıl yapacağımız hiç önemli değil! Beş’i nasıl tanımladığımızın hiç mi hiç önemi olmayacak. Beş’i, üç’ü, sekiz’i ve toplamayı öyle tanımlayaca-

Aslında $2 + 2$, hiç bir zaman 4 ’e eşit olamaz, çünkü $2 + 2$ sadece ve sadece $2 + 2$ ’dir, ve elbette 4 değildir. $2 + 2$ ’nin ancak değeri 4 ’e eşit olabilir.

ğız ki $5 + 3 = 8$ eşitliği doğru olacak. Önemli olan, sayıları ve işlemleri nasıl tanımladığımız değil, tanımladığımız sayı ve işlemlerin istediğimiz özellikleri sağlamaları... İşte bu, matematiği matematik yapan niteliklerin en önemlilerinden biridir. Daha doğrusu modern matematiği modern matematik yapan budur. Matematikte kavramların nasıl tanımlandıkları değil, kavramların hangi özellikleri sağladıkları önemlidir.

Matematiğin bu bakış açısı sadece sayılar için değil, her kavram için geçerlidir. Noktaların, doğruların, düzlemlerin nasıl tanımlandıkları önemli değildir, nasıl tanımlanırlarsa tanımlansınlar, önemli olan bu kavramların istediğimiz özellikleri sağlamasıdır.

Sıfır, bir, iki, üç gibi birkaç doğal sayıyı teker teker tanımladıktan sonra genel olarak doğal sayı kümesini tanımlayacağız. Bu

daha zor olacak.

İşte böyle... Doğal sayıları ve toplamayı tanımlayacağız. Tanımımız bize $2 + 2 = 4$ eşitliğini verecek. Ayrıca $x + y = y + x$ eşitliğini de verecek. Çarpmayı da tanımlayacağız. Göreceğiz ki $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ eşitliği geçerli. Ayrıca $2 \times 2 = 4$ eşitliğini de kanıtlayacağız. Ne mutlu bize! ♣

Dilbilimci Matematikçi: Giuseppe Peano (1858-1932)

Doğal sayıların bugün bilinen (ve bu sayıda açıklayacağımız) matematiksel tanımını ilk bulan Giuseppe Peano, dilbilime de meraklıydı.

Bilindiği gibi Esperanto tamamıyla yapay, dilbilgisi oldukça kolay, daha çok Latince, yapay, yani insan buluşu bir dildir. “Umut eden” anlamına gelen Esperanto, Polonyalı Zamenhof (1859-1917) tarafından henüz bir lise öğrencisiyken 1878’de bulunmuş ve yeni bir dil olarak ilk kez 1887’de yayımlanmıştır. Zamenhof’un amacı insanların bu evrensel dilde konuşarak değil, yazışarak anlaşmalarıydı.

1903’te Peano, Zamenhof gibi, Latinceyi sadeleştirerek “bükünsüz Latince” demek olan Latino sine flexione yapay dilini bulmuştur. Latine sine flexione, Latince



Giuseppe Peano



L.L. Zamenhof

sözcükleri korumuş, ancak ekleri ve çekimleri (yani “flexione/büküm”leri) tamamıyla kaldırmıştır, çünkü bükümler bir dili zorlaştıran öğelerdir. Bir kızılderi dili olan Navajo dili o kadar zordur ki, ABD, İkinci Dünya Savaşı’nda şifre olarak bu dili kullanmıştır. Navajo dilinde Waşakotyatawits̱erahekvhtha’s̱e, “ona bir kadın vücudunu çirkinleştiren üstüne giyilen şeyler yaptı” anlamına gelir... Örneğin İngilizce görece az bükümlü dil olduğundan öğrenmesi oldukça kolaydır.

Latine sine Flexione’yi (şayet öbür dilleri biliyorsanız ve çok istiyorsanız) <http://www.geocities.com/Athens/Olympus/2948/index2.html> adresinden öğrenebilirsiniz.