Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Peano Belitleri

Bir önceki yazıda, doğal sayılarda toplamayı, çarpmayı, üs almayı ve eşitsizliği anlayabilmek için

$$x \mapsto x + 1$$

olarak tanımlanan “artı bir” ya da “ardılı” işlemini anlamamızın yeterli olduğunu gördük.

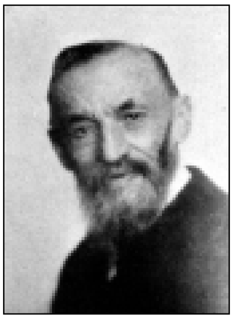
Burada, şu soruyu sorup yanıtlayacağız: “Ardılı” işleminin nesini bilmeliyiz ki doğal sayılarla ilgili anlamak istediğimiz “her şeyi” anlayalım[1]? Bu soruyu ilk Giuseppe Peano adlı İtalyan matematikçi sormuş ve yanıtlamıştır. Peano Belitleri (Aksiyomları) adı verilen bu özellikleri bu yazıda ifşa edeceğiz!

Bundan böyle $x + 1$ yerine $S(x)$ yazalım[2], ki $x + 1$ işleminin 1’le ilgili bir işlem olduğu gibi aslında pek de yanlış olmayan ama bizi yanlış yönlendirebilecek bir fikre saplanmayalım. $S(x)$’e x’in **ardılı** adını vereceğiz.

Aşağıda doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$’nin ne olduğunu bildiğimizi varsayıp, S fonksiyonunun önemli özelliklerini bulacağız. $\mathbb{N}$ kümesinin tanımını yazının en sonunda yapacağız.

İlk Özellikler. Her şeyden önce S, doğal sayılar kümesinden gene doğal sayılar kümesine giden bir fonksiyondur[3].

Ayrıca, S birebir bir fonksiyondur, yani eğer x ve y doğal sayıları için, $S(x) = S(y)$ eşitliği geçerliyse $x = y$ eşitliği de geçerlidir[4]. Bir başka deyişle ardılları eşit olan sayılar eşittir.



Peano

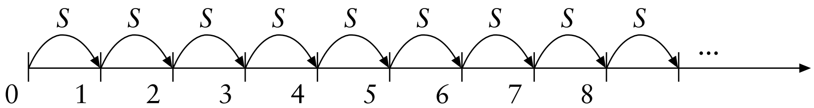
Peki S, örten[5] midir, yani her doğal sayı, bir doğal sayının ardılı mıdır? Hayır değildir. 0 sayısı hiçbir doğal sayının ardılı değildir. Ama S fonksiyonu neredeyse örten... Örten olmasına ramak kalmış: 0 dışında her sayının bir öncesi vardır ve 0 dışında her sayı kendisinden hemen önce gelen sayının ardılıdır... Yani S fonksiyonu $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ kümesine giden birebir ve örten bir fonksiyondur.

İkinci Özellik. S fonksiyonunun bir başka önemli özelliği daha var. O da şu: A, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$’nin bir altkümesi olsun. Eğer 0, A’nın bir öğesiyse ve A’daki her x sayısı için x’in ardılı olan $S(x)$ sayısı da A’daysa o zaman $A = \mathbb{N}$’dir. Bir başka deyişle, $\mathbb{N}$’nin, 0’ı içeren ve içerdiği her sayının ardılını da içeren her altkümesi $\mathbb{N}$’ye eşittir. Yani,

(i) $0 \in A$, ve

(ii) her $x \in A$ için, $S(x) \in A$

ise o zaman $A = \mathbb{N}$’dir. Nitekim, bu iki koşulu sağlayan bir A kümesi alalım. 0’ın A’da olduğunu (i)’den dolayı biliyoruz. (ii)’de x yerine 0 alırsak, $0 \in A$ olduğundan, 0’ın ardılı olan $S(0)$ sayısının, yani 1’in de A’da olduğunu anlarız. İkinci önermede bu kez x yerine 1 alalım; demek ki 1’in ardılı $S(1)$, yani 2 de A’da. Şimdi, ikinci önermede x yerine 2 alalım, böylece 3’ün de A’da olduğunu görürüz. Bunu böyle sür-



1 Gödel her şeyi kanıtlayamayacağımızı 1931’de kanıtlamıştır. Bunu bir başka sayımızda daha ayrıntılı görülür.

2 Buradaki S, “sonraki” anlamına gelen İngilizce “successor” ve Fransızca “successeur” sözcüklerinin baş harfidir, Türkçe “sonraki” sözcüğünün değil!

3 Daha doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$’yi tanımlamadık. Bunu daha sonraki yazılarda yapacağız. Şimdilik, $\mathbb{N}$ diye bir kümemiz olduğunu varsayıp sezgisel takılıyoruz. Yani düşünüyoruz. Yazının sonunda $\mathbb{N}$’nin ne olması gerektiğini göreceğiz. $\mathbb{N}$’nin ne olması gerektiğini gördükten sonra $\mathbb{N}$’nin varlığını kanıtlamalıyız. Bunu da bir sonraki yazıda yapacağız.

4 Eğer $x + 1 = y + 1$ ise $x = y$ eşitliği de doğrudur, bunu herkes bilir!

5 2003-I’de örten bir fonksiyonun tanımı yapılmıştı. Anımsatalım: $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in Y$ için $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa, f fonksiyonuna **örten** denir.

dürürsek, 4, 5, 6, ... her doğal sayının N'de olduğunu anlarız.

Yukarda verdiğimiz bir kanıt değildir, sadece okuru ikna etmeye yarayan bir akıl yürütmedir. Çünkü doğal sayıları matematiksel olarak henüz tanımlamadık.

Bu iki özelliğin doğal sayıları, toplamayı, çarpmayı, üs almayı, eşitsizliği anlamamız için yeterli olduğu varsayılır.

Şimdi doğal sayılar kümesinin matematikçiler tarafından genel kabul gören tanımını verelim.

Verelim ama doğal sayılar kümesi sadece bir küme değildir ki... Tanımda N adı verilen bir küme vardır, ama ayrıca 0 adı verilen bir öğe ve S adı verilen bir fonksiyon da vardır. Yani aslında "doğal sayılar kümesi" N değil, **doğal sayılar yapısı** $(\mathrm{N}, 0, S)$ tanımlanır.

Doğal sayılar yapısı, hemen aşağıda açıklayacağımız özellikleri sağlayan bir $(\mathrm{N}, 0, S)$ üçlüsüdür. Buradaki N bir kümedir. 0, N'nin bir öğesidir. S, N'den N'ye giden bir fonksiyondur. Bu küme-öğe-fonksiyon üçlüsü Peano belitleri adı verilen şu iki özelliği sağlamalıdır:

P1. S birebir bir fonksiyondur ve $S(\mathrm{N}) = \mathrm{N} \setminus \{0\}$ eşitliği geçerlidir.

P2. A, doğal sayılar kümesi N'nin,

(i) $0 \in A$, ve

(ii) $x \in A$ ise $S(x) \in A$

özelliklerini sağlayan bir altkümesiyse o zaman $A = \mathrm{N}$'dir.

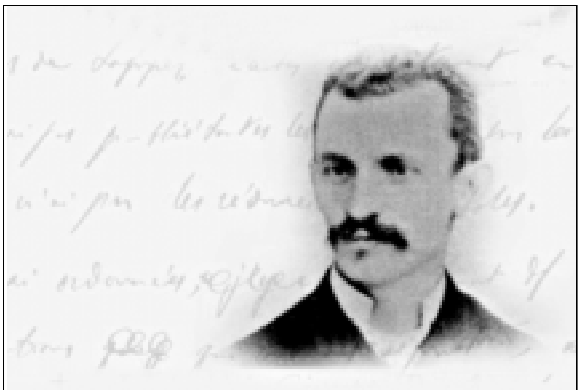
Bu iki özellik doğal sayılar hakkında merak ettiğimiz özelliklerin çok büyük bir çoğunluğunu kanıtlamaya yeterlidir. Nerden biliyoruz bunu? Deneyimle...

Yukardaki özellikleri sağlayan bir $(\mathrm{N}, 0, S)$ yapısında toplama, çarpma ve üs alma gibi işlemler tanımlanabilir ve bu işlemler tahmin edilen özellikleri sağlarlar. Ayrıca böyle bir yapıda bir eşitsizlik de tanımlayabiliriz. Bütün bunları daha sonra yapacağız. Ama önce çok önemli bir soru soralım: Yukardaki P1 ve P2 özelliklerini sağlayan $(\mathrm{N}, 0, S)$ üçlüsü var mıdır?

Evet vardır! İstenirse (ama ancak istenirse) bulunur.

Vardır da nerdedir?

Bundan sonraki yazılarda bunun öyküsünü okuyacaksınız. Doğal sayılar yapısının var olduğunu hep birlikte göreceğiz. Sabırla. Önce sezgisel kümeler kuramı göreceğiz (sayfa 17-26). Daha sonra Russell paradoksunu açıklayarak sezgisel kümeler kuramındaki eksikliği göreceğiz (sayfa 27-32). Bunun üzerine doğal olarak belitsel kümeler kuramına yöneleceğiz (sayfa 33-40). Bütün bunları sadece ve sadece P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathrm{N}, 0, S)$ üçlüsü bulmak için yapacağız. Üçlüyü sayfa 41-44'te Doğal Sayılar Kümesi Nihayet! yazısında bulacağız. Ardından, toplamayı, çarpmayı, sıralamayı tanımlayıp bunların çok bilinen temel özellikleri sağladığını kanıtlayacağız (sayfa 45-47). Çok önemli yazılar okuyacaksınız. Kolay gele! ♣



Giuseppe Peano. Bugün ilkokulda bile öğretilen $\cup$, $\cap$, $\subset$, $\in$, $\varnothing$ gibi simgeleri borçlu olduğumuz Giuseppe Peano bir çiftçi ailesinin çocuğuydu. Giuseppe önce köy okuluna gitti. Sonra her gün 5 + 5 = 10 km'lik yolu göze alarak kasaba okuluna devam etti. Avukat ve papaz olan ağabeyi (daha çok köylerde geçerli olan Katolik geleneğine göre en büyük kardeş papaz olmak zorundadır) kardeşinin yeteneğini görünce onu lise sınavlarına soktu. Sınavı kazanıp liseden sonra Torino Üniversitesi'nde (daha sonra mühendisliğe geçmek üzere) matematik okuyan Peano, üçüncü yılında sınıfının birincisiydi, çünkü sınıfta başka öğrenci yoktu, diğerleri matematiği bırakıp mühendisliğe geçmişlerdi! Çağının çok ilerisinde bir matematik anlayışına sahipti Giuseppe Peano. Gelişmiş analitik yeteneğiyle diğerlerinin makalelerinde yanlış bulmasıyla ünlüydü. Analizden mantığa birçok önemli buluşları olmuştur. Birçok tarihçi tarafından matematiksel mantığın kurucusu olarak kabul edilir.

Peano'nun okul arkadaşlarının adlarını bugün kimse bilmez!