Kapak Konusu:  $2 \times 2 = 4$ 

## Sezgisel Anlamda Küme

Bu yazıda bir kümenin ne anlama geldiğini sezgisel olarak anlamaya çalışacağız. Doğal sayıları, hatta diğer sayıları da bildiğimizi varsayacağız. Doğal sayıları ilerde, daha sonra inşa edeceğiz. O zamana dek en azından tanımladığımız kavramlara örnek vermek için doğal sayılara ihtiyacımız olacak ve doğal sayıları hiç çekinmeden kullanacağız.

Bir küme, adına öge dediğimiz bazı nesnelere içeren bir topluluktur. Örneğin, ülkeler bir küme oluştururlar, bir ülkenin şehirleri bir küme oluşturur, bir şehrin okulları bir küme oluşturur, bir okulun sınıfları bir küme oluşturur, bir sınıfın öğrencileri bir küme oluşturur. Alışveriş listesi de bir küme olarak görülebilir.

Her ülke, ülkeler kümesinin bir ögesidir. Ülkeler kümesini  $\dot{U}$  harfiyle, Türkiye'yi de  $T$  harfiyle gösterirsek,  $T$ 'nin  $\dot{U}$  kümesinin bir ögesi olduğunu,

$$T \in \dot{U}$$

yazılımıyla gösteririz. Eğer Ankara'yı  $A$  ile gösterirsek, Ankara bir ülke olmadığından,  $A$ ,  $\dot{U}$ 'nün bir ögesi değildir. Bunu da,

$$A \notin \dot{U}$$

olarak gösteririz.

Matematiksel bir kümenin ögeleri de matematiksel nesne olmalı elbet. Dolayısıyla, yukardaki örnekler matematiksel anlamda küme değildirler. Ama doğal sayılar kümesi matematiksel anlamda bir kümedir. Bu kümenin ögeleri 0, 1, 2, 3 gibi sayılardır. Doğal sayılar kümesi matematikte  $N$  simgesiyle gösterilir. Örneğin  $5 \in N$ , ama  $5/2 \notin N$ ,  $-4 \notin N$ .

Öge olarak sadece 2'yi, 3'ü, 5'i ve 7'yi içeren küme

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

olarak yazılır.  $\{2, 3, 4\}$  bir başka kümedir; bu son kümenin üç ögesi vardır: 2, 3 ve 4.

{ ve } simgelerine açan ve kapatan küme parantezi adı verilir. Küme parantezleri arasına aynı ögeyi elli defa yazmak, o kümede o ögeden elli tane var anlamına gelmez! Aynı ögeden bir kümede ancak bir tane olabilir... Örneğin,  $\{a, a, a\}$  kümesinin

bir tek ögesi vardır, o da  $a$ 'dır.

$\{a, b\}$  kümesinin en az bir, fazla iki ögesi vardır. Eğer  $a = b$  ise bir,  $a \neq b$  ise iki ögesi vardır.

$\{a, b\}$  ile  $\{b, a\}$  yazılımları arasında matematiksel olarak bir fark yoktur, ikisi de aynı kümeyi simgeler, çünkü aynı ögeleri vardır. Genel olarak, aynı ögeleri olan iki küme birbirine eşittir. Sözelimi, eğer

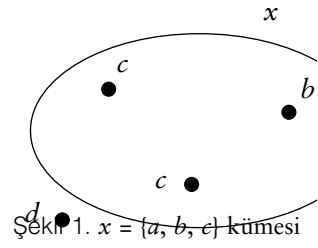
$a$ , 8'den küçük asal sayılar kümesi,

$b$ ,  $x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210 = 0$  denkleminin çözüm kümesi,

$$c = \{2, 3, 5, 7\}$$

ise, o zaman  $a = b = c$  eşitlikleri geçerlidir.

Kümeleri Şekil 1'deki gibi yumurta ya da patates biçiminde bir şekille gösteririz. Kümenin ögelerini yumurtanın içine yazarız. Örnekte üç ögeli  $x = \{a, b, c\}$  kümesi çizilmiştir.  $d \notin x$  olduğundan,  $d$ , yumurtanın dışına yazılmış.



Kimi zaman bir kümenin ögeleri küme olabilirler. Örneğin

$$\{\{0, 3, 5\}, \{0, 2\}\}$$

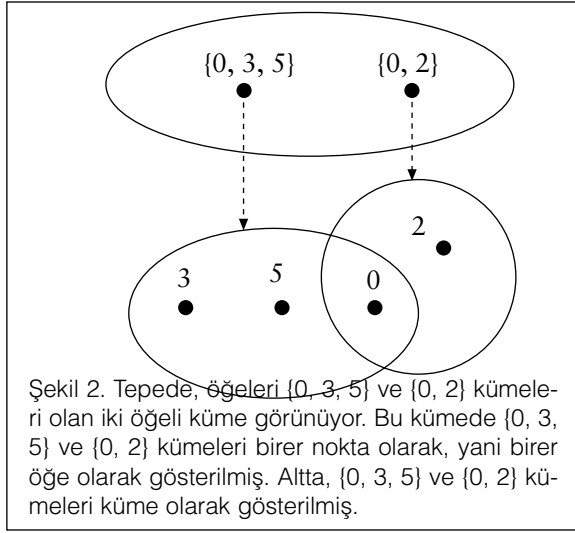
kümesinin  $\{0, 3, 5\}$  ve  $\{0, 2\}$  kümeleri olmak üzere iki ögesi vardır. Küme olan bu ögelerin de ögeleri vardır. Bu durumu Şekil 2'deki gibi bir şekilde gösterebiliriz. Görüldüğü gibi, aynı nesne hem küme hem de öge olabiliyor.  $\{0, 3, 5\}$  bir kümedir, ama bu küme bu örnekte olduğu gibi bir başka kümenin ögesi olabilir.

Bu gibi durumlarda aynı nesneyi aynı şekil üzerinde iki değişik biçimde resmetmekte yarar vardır:

1) Öge olarak, yani nokta olarak,

2) Küme olarak, yani yumurta biçiminde bir şekille.

Şekil 2'dekinden çok daha karmaşık durumlar olabilir. Sözelimi  $\{\{\{\{0\}\}\}\}$  kümesinin bir ögesi vardır, o da  $\{\{\{0\}\}\}$  kümesidir.  $\{\{\{0\}\}\}$  kümesinin de bir tek ögesi vardır, o da  $\{\{0\}\}$  kümesidir.  $\{\{0\}\}$  kümesi-

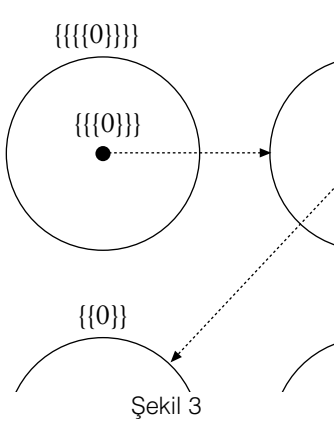


nin de bir tek ögesi vardır, o da  $\{0\}$  kümesidir.  $\{0\}$  kümesinin de bir tek ögesi vardır, o da  $0$ 'dır. Bu örneğimiz de Şekil 3'te.

Daha daha tuhaf durumlar olabilir. Sözelimi şu örneği ele alalım:

$$x = \{\{0, 2\}, \{2, 3, 4\}, 2, 3\}$$

Bu durumu Şekil 4'te çizdik.



Görüldüğü gibi her küme hem bir nokta olarak hem de bir patates olarak resmedilebilir.

Daha daha daha tuhaf durumlar olabilir. Sözelimi öyle bir  $x$  kümesi olabilir ki  $x$ 'in bir tek ögesi vardır ve bu öge gene  $x$ 'tir... Yani  $x = \{x\}$  olabilir. O zaman  $x \in x \in x \in \dots$  olur. Ben "olabilir" dedim diye olacak değil, ama böyle bir durum gene de olabilir, olmaması için görünürde bir neden yok, hayal etmesi zor bir durum bile olsa...

Hatta şöyle bir durum olabilir:

$$x = \{y\} \text{ ve } y = \{x\}.$$

O zaman  $x \in y \in x \in y \in \dots$  olur. Ya da şöyle bir durum olabilir:

$$x = \{y\}, y = \{z\} \text{ ve } z = \{x\}.$$

Şekil 5'te görülen bu durumlar (bu satırların yazarının bilmediği bir nedenden) kümeler kuramında ya-

saklanır. Bunu daha sonra, sayfa 38-40'da göreceğiz

### Alıştırmalar.

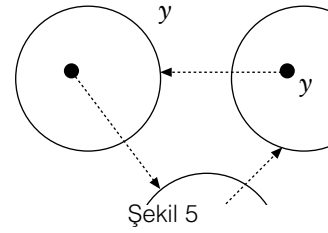
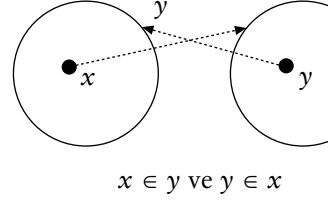
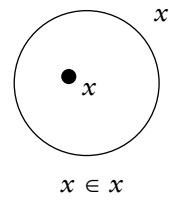
1. Eğer  $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$  ise  $x = z$  ve  $y = t$  eşitliklerini kanıtlayın.

2. Eğer  $\{x, \{x, y\}\} = \{z, \{z, t\}\}$  ise,  $x = z$  ve  $y = t$  olmak zorunda mıdır?

3. Ülkemizde basılan bir ders kitabında "sınıfımızın güzel kızları"nı öge olarak içeren bir kümeden söz ediliyor. Neden böyle bir küme (ne matematikte, ne sosyolojide, ne de herhangi bir bilimsel dalda) olamaz?

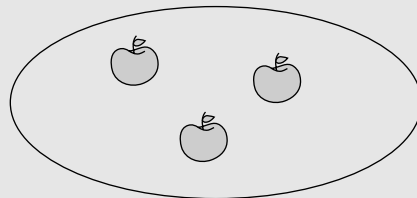
4.  $x \in x$  ilişkisini sağlayan bir  $x$  kümesinin varlığının kabul edilir olup olmadığı konusunda arkadaşlarınızla felsefi bir tartışmaya girin. Matematiksel olarak kimsenin haklı çıkamayacağını bilerek...

5. İnsanoğlunun 2005 yılına kadar hiç düşünmediği ve düşünmeyeceği, hiçbir biçimde tanımlamadığı ve tanımlamayacağı, aklına hiç gelmeyen ve hiç gelmeyecek doğal sayılar vardır elbet. Bu doğal sayılardan oluşan kümenin en küçük ögesi (sayısı) vardır. Bu sayı hakkında ne düşünüyorsunuz? ♣



### İlkokul Kitaplarından Yayıgın Bir Yanlış

Birçok ilkokul matematik kitabında şu tip sorular görülür: "Aşağıdaki kümede kaç öge vardır?"



Doğru yanıt kitaba göre üçtür. Oysa üç elma da tıpatıp aynı olduğundan doğru yanıt bir olmalıdır.