

Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Sezgisel Kümeler Kuramı II

Boşküme, Altküme ve Altkümeler Kümesi

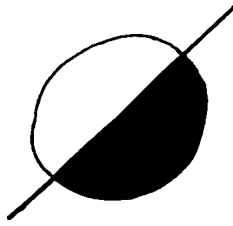
Boşküme. Hiç ögesi olmayan kümeye **boşküme** denir. Boşkümenin bitaneçik bile ögesi yoktur ve bu küme \emptyset simgesiyle gösterilir. Demek ki, x ne olursa olsun, $x \notin \emptyset$.

Boşküme var mıdır ya da olmalı mıdır? Elbette olmalıdır. Örneğin her şeyi bilen insanlar kümesi boşkümedir, 2003 yılına kadar Türkiye cumhurbaşkanı olmuş kadınların kümesi boşkümedir. Boşkümeden bol ne var!

Ancak bir tane boşküme vardır! Bunu hemen kanıtlayabiliriz. Diyelim iki tane boşküme var, yani iki hiç ögesi olmayan küme var. Hiç ögesi olmayan bu iki kümeye x ve y diyelim. $x = y$ eşitliğini kanıtlayacağız. Kanıtlayalım. Diyelim, x ve y birbirine eşit değil. O zaman ikisinden birinde diğerinde olmayan bir öge olması, çünkü her ikisinin de aynı öğeleri olsaydı küme eşitliğinin tanımından dolayı (sayfa 17) x ve y birbirine eşit olurdu. Ama bu kümelerin hiç ögesi yok ki ikisinden birinde diğerinde olmayan bir öge olsun!.. Demek ki bu iki küme birbirine eşitmiş...

Boşkümeden sadece bir tane olduğundan ona boşküme adını verme ve onu \emptyset simgesiyle gösterme hakkını kendimizde buluyoruz. İki tane olsaydı örneğin, birine \emptyset_1 , diğerine \emptyset_2 olarak göstermek zorunda kalırdık.

Daha doğmamış eşekler kümesi nasıl bir kümedir? Daha doğmamış eşekler olduğundan, daha doğmamış eşekler kümesi boşküme olamaz. Ama daha doğmamış eşekler kümesinin bir tek ögesini gösteremezsiniz. Bundan da şu anlaşılıyor: Bir kümenin var olması için illa o kümenin bütün öğelerini bilmemiz gerekmiyor. Bu, şuna benzer: İkinci Dünya Savaşı'nda ölen Fransızların sayısı belli bir doğal sayıdır. Bu sayıyı tam olarak bilmememiz böyle bir sayının olmadığı anlamına gelmez.



"Yarısı boş yarısı dolu küme"

Şimdi birçok kişiye tuhaf gelebilecek bir teorem kanıtlayalım: Boşkümenin her ögesi 1'e eşittir! Kanıtın püf noktası boşkümenin hiç öge içermemesidir. Tanımı gereği hiç öge içermeyen boşkümenin her ögesi 1'e eşittir! Bunu kanıtlayalım. Diyelim ki savımız yanlış, yani boşkümenin her ögesi 1'e eşit değil... O zaman boşkümede 1'e eşit olmayan bir öge vardır. Ama hani boşkümede hiç öge yoktu? Hiç ögesi olmayan boşkümede 1'e eşit olmayan bir öge olabilir mi? Elbette olamaz. Demek ki boşkümenin her ögesi 1'e eşit!

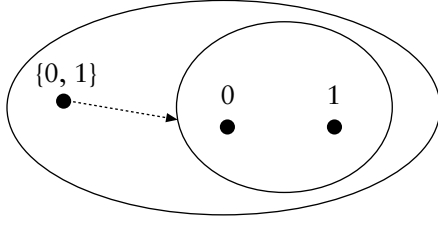
Yukardaki kanıtın bir benzeri, boşkümenin her ögesinin 2'ye eşit olduğunu da kanıtlar. Yani boşkümenin her ögesi hem 1'e hem de 2'ye eşittir, hatta hatta π 'ye ve $\sqrt{2}$ 'ye de eşittir... Neyse ki boşkümenin hiç ögesi yok... Olsaydı, $1 = 2$ gibi saçmasapan bir eşitlik kanıtlamış olacaktık!

Boşkümenin her ögesi istediğimiz tüm özellikleri sağlar. Boşkümenin her ögesi sarıdır, yeşildir, uzundur, aynı zamanda kısadır da. Hiç ögesi olmayan boşkümenin tüm öğeleri tüm özellikleri ve eşitlikleri sağlarlar. Bunu boşkümenin hiç ögesi olmasına borçluyuz.

Boşkümeyi boşlamayalım! En önemli bir iki kümeden biridir boşküme. Bir öğeli çok küme vardır, ama sıfır öğeli tek bir küme vardır: boşküme. Sadece bu özellik boşkümeyi diğer kümelerden ayırır, onu ayrıcalıklı kılar.

Altküme. Eğer x kümesinin tüm öğeleri aynı zamanda y kümesinin öğeleriye, o zaman, tanım gereği, x kümesi y kümesinin bir **alkümesidir**. Bunu $x \subseteq y$ olarak gösteririz. Dilersek y 'ye x 'in **üstkümesi** adını verebiliriz ama bu terim matematikte pek az kullanılır.

Örneğin, çift doğal sayılar kümesi $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ doğal sayılar kümesinin bir altkümesidir. Bir başka örnek: $\{0, 2\}$ kümesi $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin bir altkü-



{0, 1} kümesi, {0, 1, {0, 1}} kümesinin hem bir ögesi hem de bir altkümesidir.

mesidir. {0, 2, 3} kümesi de {0, 1, 2, 3} kümesinin bir altkümesidir.

x hangi küme olursa olsun, x, x 'in bir altkümesidir, yani $x \subseteq x$ ilişkisi her x kümesi için geçerlidir, çünkü x 'in her ögesi x 'in bir ögesidir, kuşku mu var?..

Bir kümenin altkümesiyle o kümenin öğelerini birbirine karıştırmamak gerekir. Örneğin, sesli harfle başlayan şehirlerimizden oluşan küme, Türkiye'nin şehirleri kümesinin bir altkümesidir ama bir ögesi değildir, çünkü sesli harfle başlayan şehirler kümesi bir şehir değildir. Bir sınıfın kız öğrencilerinden oluşan küme, bir sınıfın öğrencilerinden oluşan kümenin altkümesidir ama kesinlikle ögesi değildir, sınıfta bir tek kız olsa bile... Ancak kimileyin, bir küme, bir başka kümenin hem ögesi hem de altkümesi olabilir. Örneğin {0, 1} kümesi, {0, 1, {0, 1}} kümesinin hem ögesi hem de altkümesidir, yukardaki şekilde görüldüğü gibi.

Boşküme her kümenin altkümesidir. Bunu da kanıtlayabiliriz. x herhangi bir küme olsun. Boşkümenin x 'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Yani boşkümenin her ögesinin x 'in bir ögesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Diyelim ki bu doğru değil, yani diyelim ki boşkümede x 'te olmayan bir öge var. Ama hani boşkümede hiç öge yoktu! Hiç ögesi olmayan boşkümede x 'te olmayan bir öge olabilir mi? Olamaz elbet. Demek ki boşkümenin her ögesi x 'in bir ögesiymiş, yani boşküme x 'in bir altkümesiymiş... Kanıtımız bitmiştir!

{0, 1, 2} kümesinin altkümelerini teker teker yazalım, tam sekiz tane var:

- 0 ögesi olanlar 1 tane: \emptyset
- 1 ögesi olanlar 3 tane: {0}, {1}, {2}
- 2 ögesi olanlar 3 tane: {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}
- 3 ögesi olanlar 1 tane: {0, 1, 2}

Sadece {0, 1, 2} kümesinin değil, üç ögesi olan her kümenin sekiz tane altkümesi vardır.

Genel olarak, n ögesi olan bir kümenin 2^n altkümesi vardır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Örneğin 0 tane ögesi olan boşkümenin 2^0 tane, yani 1 tane altkümesi vardır, o altküme de boşkümedir.

Tek ögeli $\{\emptyset\}$ kümesinin iki altkümesi vardır, \emptyset ve $\{\emptyset\}$.

İki ögeli $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ kümesinin dört altkümesi vardır: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ ve $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Alt kümeler Kümesi. Bir kümenin tüm altkümelerini öge olarak içeren ve bunlardan başka hiçbir öge içermeyen bir küme vardır.

Örneğin eğer $x = \{0, 1\}$ ise, x 'in altkümelerinden oluşan küme,

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

kümesidir.

Eğer $x = \{0, 1, 2\}$ ise, x 'in altkümelerinden oluşan küme,

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

kümesidir.

Eğer x bir kümeysen, x 'in altkümelerinden oluşan küme $\wp(x)$ olarak yazılır. Demek ki,

Elbette, eğer x bir kümeysen, $\emptyset \in \wp(x)$ ve $x \in \wp(x)$.

$$\begin{aligned} \wp(\{0, 1\}) &= \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \\ \wp(\{0, 1, 2\}) &= \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\} \\ \wp(\emptyset) &= \{\emptyset\} \\ \wp(\wp(\emptyset)) &= \wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \wp(\wp(\wp(\emptyset))) &= \wp(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}. \end{aligned}$$

Ayrıca, eğer $a \in x$, ise $\{a\} \in \wp(x)$ dir. Demek ki x 'in bir a ögesini $\wp(x)$ 'in $\{a\}$ ögesine götüren fonksiyon x 'ten $\wp(x)$ 'e giden birebir bir fonksiyondur. Öte yandan x 'ten $\wp(x)$ 'e giden örten bir fonksiyon, sayfa MD-2003-I, sayfa 10'da görüldüğü üzere, yoktur.

Alıştırılmalar.

1. $x \subseteq y \Leftrightarrow \wp(x) \subseteq \wp(y)$ ilişkisini kanıtlayın.
2. Her x kümesi için, $\wp^0(x) = x$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $\wp^{n+1}(x) = \wp(\wp^n(x))$ olsun. Her x için, $\{\{\emptyset, y\}, \{x\}\} \in \wp^n(x)$ ilişkisini sağlayan en küçük n 'yi bulun. ♣