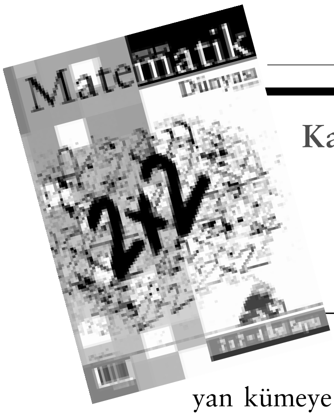


Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Sezgisel Kümeler Kuramı II

Boşküme, Altküme ve Altkümeler Kümesi

Boşküme. Hiç öğesi olmayan kümeye **boşküme** denir. Boşkümenin bitanecik bile öğesi yoktur ve bu küme $\emptyset$ simgesiyle gösterilir. Demek ki, x ne olursa olsun, $x \notin \emptyset$.

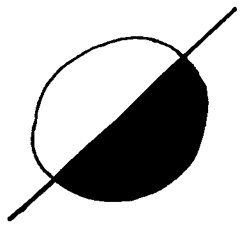
Boşküme var mıdır ya da olmalı mıdır? Elbette olmalıdır. Örneğin her şeyi bilen insanlar kümesi boşkümedir, 2003 yılına kadar Türkiye cumhurbaşkanı olmuş kadınların kümesi boşkümedir. Boşkümeden bol ne var!

Ancak bir tane boşküme vardır! Bunu hemen kanıtlayabiliriz. Diyelim iki tane boşküme var, yani iki hiç öğesi olmayan küme var. Hiç öğesi olmayan bu iki kümeye x ve y diyelim. $x = y$ eşitliğini kanıtlayacağız. Kanıtlayalım. Diyelim, x ve y birbirine eşit değil. O zaman ikisinden birinde diğerinde olmayan bir öğe olmalı, çünkü her ikisinin de aynı öğeleri olsaydı küme eşitliğinin tanımından dolayı (sayfa 17) x ve y birbirine eşit olurdu. Ama bu kümelerin hiç öğesi yok ki ikisinden birinde diğerinde olmayan bir öğe olsun!.. Demek ki bu iki küme birbirine eşitmiş...

Boşkümeden sadece bir tane olduğundan ona boşküme adını verme ve onu $\emptyset$ simgesiyle gösterme hakkını kendimizde buluyoruz. İki tane olsaydı örneğin, birine $\emptyset_1$, diğerine $\emptyset_2$ olarak göstermek zorunda kalırdık.

> Daha doğmamış eşekler kümesi nasıl bir kümedir? Daha doğmamış eşekler olduğundan, daha doğmamış eşekler kümesi boşküme olamaz. Ama daha doğmamış eşekler kümesinin bir tek öğesini gösteremezsiniz. Bundan da şu anlaşılıyor: Bir kümenin var olması için illa o kümenin bütün öğelerini bilmemiz gerekmiyor. Bu, şuna benzer: İkinci Dünya Savaşı'nda ölen Fransızların sayısı belli bir doğal sayıdır. Bu sayıyı tam olarak bilmememiz böyle bir sayının olmadığı anlamına gelmez.

Şimdi birçok kişiye tuhaf gelebilecek bir teorem kanıtlayalım: Boşkümenin her öğesi 1'e eşittir! Kanıtın püf noktası boşkümenin hiç öğe içermemesidir. Tanımı gereği hiç öğe içermeyen boşkümenin her öğesi 1'e eşittir! Bunu kanıtlayalım. Diyelim ki savımız yanlış, yani boşkümenin her öğesi 1'e eşit değil... O zaman boşkümede 1'e eşit olmayan bir öğe vardır. Ama hani boşkümede hiç öğe yoktu? Hiç öğesi olmayan boşkümede 1'e eşit olmayan bir öğe olabilir mi? Elbette olamaz. Demek ki boşkümenin her öğesi 1'e eşit!


"Yarısı boş yarısı dolu küme"

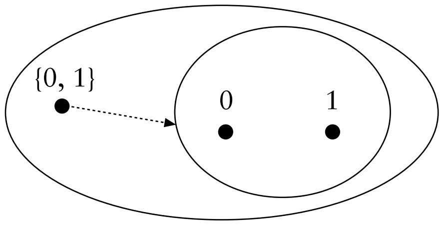
Yukardaki kanıtın bir benzeri, boşkümenin her öğesinin 2'ye eşit olduğunu da kanıtlar. Yani boşkümenin her öğesi hem 1'e hem de 2'ye eşittir, hatta hatta π'ye ve $\sqrt{2}$'ye de eşittir... Neyse ki boşkümenin hiç öğesi yok... Olsaydı, $1 = 2$ gibi saçmasapan bir eşitlik kanıtlamış olacaktık!

Boşkümenin her öğesi istediğimiz tüm özellikleri sağlar. Boşkümenin her öğesi sarıdır, yeşildir, uzundur, aynı zamanda kısadır da. Hiç öğesi olmayan boşkümenin tüm öğeleri tüm özellikleri ve eşitlikleri sağlarlar. Bunu boşkümenin hiç öğesi olmamasına borçluyuz.

Boşkümeyi boşlamayalım! En önemli bir iki kümeden biridir boşküme. Bir öğeli çok küme vardır, ama sıfır öğeli tek bir küme vardır: boşküme. Sadece bu özellik boşkümeyi diğer kümelerden ayırır, onu ayrıcalıklı kılar.

Altküme. Eğer x kümesinin tüm öğeleri aynı zamanda y kümesinin öğeleriyse, o zaman, tanım gereği, x kümesi y kümesinin bir **altkümesidir**. Bunu $x \subseteq y$ olarak gösteririz. Dilersek y'ye x'in **üstkümesi** adını verebiliriz ama bu terim matematikte pek az kullanılır.

Örneğin, çift doğal sayılar kümesi $\{0, 2, 4, 6, ...\}$ doğal sayılar kümesinin bir altkümesidir. Bir başka örnek: $\{0, 2\}$ kümesi $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin bir altkü-



{0, 1} kümesi, {0, 1, {0, 1}} kümesinin hem bir öğesi hem de bir altkümesidir.

mesidir. $\{0, 2, 3\}$ kümesi de $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin bir altkümesidir.

x hangi küme olursa olsun, x, x'in bir altkümesidir, yani $x \subseteq x$ ilişkisi her x kümesi için geçerlidir, çünkü x'in her öğesi x'in bir öğesidir, kuşku mu var?..

Bir kümenin altkümesiyle o kümenin öğelerini birbirine karıştırmamak gerekir. Örneğin, sesli harfle başlayan şehirlerimizden oluşan küme, Türkiye'nin şehirleri kümesinin bir altkümesidir ama bir öğesi değildir, çünkü sesli harfle başlayan şehirler kümesi bir şehir değildir. Bir sınıfın kız öğrencilerinden oluşan küme, bir sınıfın öğrencilerinden oluşan kümenin altkümesidir ama kesinlikle öğesi değildir, sınıfta bir tek kız olsa bile... Ancak kimileyin, bir küme, bir başka kümenin hem öğesi hem de altkümesi olabilir. Örneğin $\{0, 1\}$ kümesi, $\{0, 1, \{0, 1\}\}$ kümesinin hem öğesi hem de altkümesidir, yukardaki şekilde görüldüğü gibi.

Boşküme her kümenin altkümesidir. Bunu da kanıtlayabiliriz. x herhangi bir küme olsun. Boşkümenin x'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Yani boşkümenin her öğesinin x'in bir öğesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Diyelim ki bu doğru değil, yani diyelim ki boşkümede x'te olmayan bir öğe var. Ama hani boşkümede hiç öğe yoktu! Hiç öğesi olmayan boşkümede x'te olmayan bir öğe olabilir mi? Olamaz elbet. Demek ki boşkümenin her öğesi x'in bir öğesiymiş, yani boşküme x'in bir altkümesiymiş... Kanıtımız bitmiştir!

$\{0, 1, 2\}$ kümesinin altkümelerini teker teker yazalım, tam sekiz tane var:

0 öğesi olanlar 1 tane: $\varnothing$

1 öğesi olanlar 3 tane: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$

2 öğesi olanlar 3 tane: $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$

3 öğesi olanlar 1 tane: $\{0, 1, 2\}$

Sadece $\{0, 1, 2\}$ kümesinin değil, üç öğesi olan her kümenin sekiz tane altkümesi vardır.

Genel olarak, n öğesi olan bir kümenin 2^n altkümesi vardır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Örneğin 0 tane öğesi olan boşkümenin 2^0 tane, yani 1 tane altkümesi vardır, o altküme de boşkümedir.

Tek öğeli $\{\varnothing\}$ kümesinin iki altkümesi vardır, $\varnothing$ ve $\{\varnothing\}$.

İki öğeli $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ kümesinin dört altkümesi vardır: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$ ve $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Altkümeler Kümesi. Bir kümenin tüm altkümelerini öğe olarak içeren ve bunlardan başka hiçbir öğe içermeyen bir küme vardır.

Örneğin eğer $x = \{0, 1\}$ ise, x'in altkümelerinden oluşan küme,

$$\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

kümesidir.

Eğer $x = \{0, 1, 2\}$ ise, x'in altkümelerinden oluşan küme,

$$\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

kümesidir.

Eğer x bir kümeyse, x'in altkümelerinden oluşan küme $\wp(x)$ olarak yazılır. Demek ki,

Elbette, eğer x bir kümeyse, $\varnothing \in \wp(x)$ ve $x \in \wp(x)$.

$\wp(\{0, 1\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

$\wp(\{0, 1, 2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

$\wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$

$\wp(\wp(\varnothing)) = \wp(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$\wp(\wp(\wp(\varnothing))) = \wp(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Ayrıca, eğer $a \in x$, ise $\{a\} \in \wp(x)$ dir. Demek ki x'in bir a öğesini $\wp(x)$'in $\{a\}$ öğesine götüren fonksiyon x'ten $\wp(x)$'e giden birebir bir fonksiyondur. Öte yandan x'ten $\wp(x)$'e giden örten bir fonksiyon, sayfa MD-2003-I, sayfa 10'da görüldüğü üzere, yoktur.

Alıştırmalar.

1. $x \subseteq y \Leftrightarrow \wp(x) \subseteq \wp(y)$ ilişkisini kanıtlayın.

2. Her x kümesi için, $\wp^0(x) = x$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $\wp^{n+1}(x) = \wp(\wp^n(x))$ olsun. Her x için,

$$\{\{\varnothing\ y\ \{\{x\}\} \in p^n(x)$$

ilişkisini sağlayan en küçük n'yi bulun. ♣