



Tümevarımla Kanıt

Çoğumuzun matematikle ilgisi aritmetikle başlamıştır. Kimimiz $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ eşitliğinden, kimimiz $3^2 + 4^2 = 5^2$ eşitliğinden, kimimiz de,

$$\begin{aligned}1 &= 1 = 1^2 \\1 + 3 &= 4 = 2^2 \\1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2\end{aligned}$$

eşitliklerinden büyülenmişizdir. Sayılar kuramında her yaşa, her zevke göre büyü vardır.

Yukardaki eşitlikler raslantısal değildir: İlk n tek sayının toplamı her zaman bir karedir¹. İlk n tek sayı $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ olduğundan,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

dir. Bu eşitlik, sayılar kuramında **tümevarım** adı verilen bir yöntemle kanıtlanabilir.

Matematikte ve sayılar kuramında çok sık kullanılan bu yöntemde, kanıtlanmak istenen n doğal sayısı ile ilgili bir önerme, eşitlik, teorem, önsav, her neyse, önce 1 sayısı için kanıtlanır. Sonra, önermenin 1 'den büyüğe bir n doğal sayısı için geçerli olduğu varsayılarak, önerme bir sonraki sayı olan $n + 1$ sayısı için kanıtlanır. Böylece, önermenin tüm sayılar için geçerli olduğu anlaşılır. Çünkü, önerme 1 için doğrudur, 1 için doğru olduğundan 2 için de doğrudur, 2 için doğru olduğundan 3 için de doğrudur²...

Önermenin $n = 1$ için kanıtlanmasına "birinci adım" denir. Daha sonra, önermenin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlanmasına "tümevarım adımı" denir.

Tümevarımla kanıtla örnek olarak yukardaki eşitliği kanıtlayalım.

Teorem 1. Her n sayısı için, ilk n tek sayının toplamı n^2 'dir.

1 Yazının ilk kısmında "sayı" sözcüğünü 1 ve 1 'den büyük tam sayılar için kullanacağız, yani $1, 2, 3, 4, \dots$ sayıları için.

2 Sayfa 44 ve 48-49'da tümevarımla kanıtın neden geçerli olduğunu kanıtlayacağız.

Kanıt: İlk n tek sayının toplamına $T(n)$ adı verelim. Yani,

$$T(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

olsun. $T(n) = n^2$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

Birinci Adım. Önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin doğru olup olmadığına bakalım. $T(1)$, 1 'den 1 'e kadar olan tek sayıların toplamıdır. Demek ki $T(1) = 1 = 1^2$ eşitlikleri geçerli ve $T(n) = n^2$ eşitliğimiz $n = 1$ için doğru.

Tümevarım Adımı. Şimdi, $T(n) = n^2$ eşitliğini doğru varsayıp, $T(n + 1) = (n + 1)^2$ eşitliğini kanıtlayalım. $T(n + 1)$ sayısı ilk $n + 1$ tek sayının toplamı, yani 1 'den $2n + 1$ 'e kadar olan tek sayıların toplamı. İlk n tek sayının toplamı $T(n)$ 'dir ve varsayımımıza göre bu $T(n)$ sayısı n^2 'ye eşit. Bir sonraki $n + 1$ 'inci tek sayıya $2n + 1$. Demek ki,

$$\begin{aligned}T(n + 1) &= \text{İlk } n + 1 \text{ tek sayının toplamı} \\&= (\text{İlk } n \text{ tek sayının toplamı}) + \\&\quad (n+1 \text{'inci tek sayı}) \\&= T(n) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) \\&= (n + 1)^2\end{aligned}$$

ve $T(n + 1) = (n + 1)^2$.

Demek ki $T(n) = n^2$ eşitliği doğruysa, $T(n+1) = (n+1)^2$ eşitliği de doğrudur.

Daha önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin de doğru olduğunu kanıtlamıştık.

Böylece her n sayısı için $T(n) = n^2$ eşitliği kanıtlanmış oldu. \square

Tümevarımla kanıtın bir zayıf yanı, kanıtlanan önermenin neden doğru olduğunun pek iyi anlaşılmasındadır. Önceki kaybolmakta, mekanik bir kanıt verilmektedir. Ne demek istediğimi gene bir örnekle anlatayım. Yukardaki $T(n) = n^2$ eşitliğinin neden doğru olduğunu başka türlü göstereyim. Bir kenarı n uzunluğunda olan bir kare alalım. Bu karenin alanı n^2 'dir. Kareyi n^2 tane küçük kareye bölelim. Şimdi kareleri şöyle sayalım. (Aşağıdaki şekle bakın.) Sol alt köşede 1 kare var. Bu kareye 3 kare dokunur: biri sağından, biri tepesinden, öbürü de sağ üst köşesinden (yani çaprazından.) Bu yeni kareye 5 yeni

kare dokunur: ikisi sağından, ikisi tepesinden, biri de çaprazından. Sonra 7 yeni kare... İşte resim:

7	6	5	4
5	4	3	3
3	2	2	2
1	1	1	2

1, 3, 5, 7, ... Bunların toplamı küçük karelerin sayısına, yani n^2 'ye eşit. Görüldüğü gibi ilk n tek sayının toplamı n^2 'dir. Yukardaki önermenin neden doğru olduğu birden gün gibi ortaya çıktı. Ama matematiksel değil kanıtımız. Görme duyusuna dayanıyor.

Yukarda, tümevarımla kanıtı 1'den başlattık. Bir başka sayıdan, örneğin 0'dan da başlatabilirdik. O zaman önerme önce 0 sayısı için kanıtlanır (birinci adım), ardından, $n \geq 0$ için geçerli olduğu varsayılar bir sonraki sayı olan $n + 1$ için kanıtlanır (tümevarım adımı).

Aşağıdaki teoremi iki değişik yöntemle kanıtlayacağız.

Teorem 2. m ögeli bir kümenin altküme sayısı 2^m dir.

Kanıtı başlamadan önce okurun birkaç deney yapmasında yarar vardır. Örneğin, dört ögeli $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin teoreme göre 2^4 , yani 16 altkümesi olmalı. Okur bunları teker teker bulmalı, sıfır ögesi olan boşkümeyle unutmadan...

Teorem 2'nin Birinci Kanıtı: x , n ögeli bir küme olsun. x 'in altküme sayısını hesaplayacağız. x 'in bir altkümesi, her küme gibi, elbette öğeleri tarafından belirlenir. Demek ki x 'in bir altkümesini belirlemek için x 'in hangi öğelerinin o altkümede olduğunu, hangilerinin olmadığını söylememiz gerekiyor, yani x 'in her ögesi için "evet, bu öge o altkümede" ya da "hayır, bu öge o altkümede değil" diye iki karardan birini vermemiz gerekiyor. x 'in bir altkümesini belirlemek için x 'in her n ögesi için bu "evet" ya da "hayır" kararlarından birini vereceğiz.

Örneğin $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ise ve

- 0 için "evet" kararı
- 1 için "hayır" kararı
- 2 için "evet" kararı
- 3 için "evet" kararı
- 4 için "evet" kararı
- 5 için "hayır" kararı

vermişsek, x 'in $\{0, 2, 3, 4\}$ altkümesini elde ederiz.

x 'in bir altkümesini belirlemek için, n kez iki karardan birini vereceğiz. Demek ki x 'in altküme sayısı $2 \times 2 \times \dots \times 2$ (n defa) dir, yani 2^n dir. \square

Teorem 2'nin İkinci Kanıtı: Teoremi n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Birinci Adım. Eğer $n = 0$ ise, yani kümenin hiç ögesi yoksa, yani küme boşkümeysen, o zaman, kümenin sadece 1 tane altkümesi vardır, o da boşkümedir. $1 = 2^0 = 2^n$ olduğundan bu durumda teoreminiz kanıtlanmıştır.

Tümevarım Adımı. Şimdi teoremin ögesi olan kümeler için kanıtlandığını varsayıp (tümevarım varsayımı), teoremi $n+1$ ögesi olan kümeler için kanıtlayalım.

$n+1$ ögeli kümemize x diyelim. Kümenin öğeleri a_1, \dots, a_{n+1} olsun:

$$x = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}.$$

Ayrıca $y = \{a_1, \dots, a_n\}$ olsun. Tümevarım varsayımı y 'nin 2^n tane altkümesi olduğunu söylüyor.

x 'in iki türlü altkümesi vardır: a_{n+1} 'i içerenler ve içermeyenler. a_{n+1} 'i içermeyenler aynı zamanda y 'nin de altkümesi olduklarından, tümevarım varsayımına göre, bu tür altkümelere 2^n tane olduğunu biliyoruz. a_{n+1} 'i içermeyen bu 2^n altküme a_{n+1} 'i de eklersek tam tamına x 'in a_{n+1} 'i içeren altkümelerini elde ederiz, ne bir fazla ne bir eksik...

Demek ki x 'in, a_{n+1} ögesini içermeyen 2^n tane ve a_{n+1} ögesini içeren gene 2^n tane altkümesi vardır. Demek ki x 'in toplam $2^n + 2^n$, yani 2^{n+1} tane altkümesi vardır. \square

Şimdi, n ögeli bir kümenin kaç tane k ögeli altkümesi vardır sorusunu sorup yanıtlamak istiyoruz. Ama bu soruyu yanıtlamadan önce başka sorular soracağız.

Soru 1. A, B ve C harflerinin herbirini birer kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız kaç sözcük yazabiliriz?

Teker teker sıralayabiliriz sözcükleri: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Demek ki 6 tane yazabiliyoruz.

Soru 2. A, B, C ve D harflerinin herbirini birer kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız kaç sözcük yazabiliriz?

Sözcükleri gene teker teker sıralayabiliriz. Yukardaki gibi alfabetik sıraya dizmenin sonsuz yarımları vardır. Yanıt 24^3 'tür. \square

Soru 3. A_1, A_2, \dots, A_n birbirinden değişik harfler olsunlar. Bu harflerin herbirini birer kez kullanarak kaç sözcük yazabiliriz?

Yukarda 3 için 6, 4 için 24 yanıtını bulduk. Okur herhalde $6 = 1 \times 2 \times 3 = 3!$ ve $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$ eşitliklerinin farkına varmıştır.

Yanıt $n!$ dir elbet. Ama neden?..

Birinci harf için n seçeneğimiz var. Birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye $n - 1$ seçenek kalıyor. İkinci harfi de seçtikten sonra geriye $n - 2$ seçenek kalıyor... Böylece $n, n-1, n-2, \dots$ derken, en son harf için de 1 seçenek kalıyor. Demek ki toplam sözcük sayısı $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ dir, yani $n!$ dir. \square

Bu sorunun tümevarımla kanıtını okur verebilir.

Not: Eğer $n = 0$ ise, $0!$ sayısı 1 olarak tanımlanır. Yukarda bulduğumuz yanıt $n = 0$ için de geçerlidir, yani 0 harfle tek bir sözcük yazılabilir, o da hiç harfi olmayan boş sözcüktür. Harfsiz boş sözcüğü harfleriyle yazamayacağımızdan, boş sözcük harfsiz olarak $\langle \rangle$ biçiminde yazılır.

Soru 4. A, B, C, D, E, F harflerini birer kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız dört harfli kaç sözcük yazabiliriz?

Teker teker alfabetik sıraya dizebiliriz eğer yeterince sabrımız varsa, ancak matematikle daha çabuk bulunabilir sözcük sayısı, ne de olsa sözcüklerin kendisi değil, sözcüklerin sayısı isteniyor sadece. Birinci harf için 6 seçeneğimiz var. Birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye 5 seçenek kalıyor. İlk iki harfi seçtikten sonra geriye 4 seçenek kalıyor. İlk üç harfi seçtikten sonra geriye dördüncü harf olarak 3 seçenek kalıyor. Demek ki doğru yanıt $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ 'dır. \square

Soru 5. A_1, A_2, \dots, A_n birbirinden değişik harfler olsunlar. Bu harflerin herbirini birer kez kullanarak k harfli kaç sözcük yazabiliriz?

Birinci harf için n seçeneğimiz var. Birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye $n - 1$ seçenek kalıyor. İlk iki harfi seçtikten sonra geriye $n - 2$ seçenek kalıyor. İlk üç harfi seçtikten sonra geriye $n - 3$ seçenek kalıyor. Bu böylece k 'ye kadar devam eder. En sonuncu ikinci harf için geriye $n - k + 1$ seçenek kalıyor. Demek ki, toplam $n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n - k + 1)$ seçenek var. Bu sayı da

$$\frac{n!}{(n - k)!}$$

sayısına eşittir. Demek ki n değişik harften $n!/(n - k)!$

tane k harfli sözcük yazabiliriz. \square

Bir önceki soruda olduğu gibi $n = 6, k = 4$ ise, daha önce bulduğumuz

$$\frac{6!}{(6 - 4)!} = \frac{6!}{2} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

yanıtını buluruz.

Not: $k = 0$ alırsak, yukardaki yanıtın, n değişik harften bir tane sıfır harfli sözcük yazacağımızı buluruz, ki bu da doğrudur: Sıfır harfli sadece boş sözcük vardır.

Şimdi asıl sormak istediğimiz soruyu soralım: n öğeli bir kümenin k öğeli kaç altkümeleri vardır?

Eğer $k > n$ ise hiç yoktur, yani yanıt 0'dır. Ama eğer $0 \leq k \leq n$ ise mutlaka n öğeli en az bir küme vardır.

Kümenin n ögesine a_1, a_2, \dots, a_n adını verelim. Yukardaki soruda bu n ögeden $n!/(n - k)!$ tane k harfli sözcük elde edeceğimizi gördük. Her k harfli sözcüğün harfleri k öğeli bir altküme oluşturur; ancak aynı harflerle yazılmış sözcüklerin harfleri aynı altküme oluştururlar. Örneğin

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \text{ ve } a_3 a_2 a_4 a_1$$

sözcükleri $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ altkümelerini oluştururlar. Kaç sözcük aynı altküme oluşturur, yani $\{a_1, \dots, a_k\}$ altkümelerini kaç değişik sözcükten oluşturabiliriz? Bu harflerle kaç sözcük yazılıyorsa o kadar! Yani a_1, \dots, a_k harfleriyle yazılan her $k!$ sözcük aynı altküme, $\{a_1, \dots, a_k\}$ altkümelerini oluşturur.

k harfli $n!/(n - k)!$ sözcük olduğundan ve bunlardan $k!$ tanesi aynı altküme oluşturduğundan, k öğeli altküme sayısını bulmak için $n!/(n - k)!$ sayısını $k!$ sayısına bölmemiz gerekir, demek ki k öğeli $\frac{n!}{(n - k)!k!}$ tane altküme varmış.

$\binom{n}{k}$ sayısını eğer $0 \leq k \leq n$ ise $n!/k!(n - k)!$ olarak, diğer şıklarda da 0 olarak tanımlayarak,

lım:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{eğer } 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n < k \text{ ya da } k < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Bu sayı n 'nin k 'lisi olarak okunur. Yukarıda bulduklarımızdan şu çıkar:

Teorem 3. n öğeli bir kümenin $\binom{n}{k}$ tane k öğeli altkümesi vardır. \square

Teorem 3'ün bir başka kanıtı: Aynı teoremi n üzerinden tümevarımla da kanıtlayabiliriz. n doğal sayısı verilmiş olsun. Ve $k = 0, 1, \dots, n$ olsun.

Önce $n = 0$ için kanıtlayalım teoremi. $n = 0$ ise $k = 0$ olmalı. 0 öğeli bir kümenin 0 öğeli tek bir altkümesi vardır, o da boşkümedir.

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(n-0)!} = 1$$

olduğundan, teorem $n = 0$ için doğru.

Şimdi teoremin n için doğru olduğunu varsayıp teoremi $n + 1$ için kanıtlayalım. x , $n + 1$ öğeli bir küme olsun. $k = 0, 1, \dots, n + 1$ olsun.

Eğer $k = n + 1$ ise, x 'in $n+1$ öğeli bir tek x altkümesi olduğundan yanıt 1'dir. Öte yandan,

$$\binom{n+1}{n+1} = 1$$

olduğundan teorem $k = n + 1$ için doğru.

Bundan böyle $1 \leq k \leq n$ eşitsizliklerini varsayacağız. $a \in x$, sabit bir öge olsun. $y = x \setminus \{a\}$ olsun. Demek ki y 'nin n ögesi var. x 'in k öğeli iki türlü altkümesi vardır: a 'yı içerenler ve içermeyenler. (Bu dediğimiz $k = 0$ ise de geçerlidir!) a 'yı içermeyenler aynı zamanda y 'nin de (k öğeli) bir altkümesidir. x 'in a 'yı içeren k öğeli altkümelerinden a 'yı atarsak, geriye y 'nin $k-1$ öğeli altkümeleri kalır. Tümevarım varsayımına göre y 'nin k öğeli

$\binom{n}{k}$ tane, $k-1$ öğeli $\binom{n}{k-1}$ tane altkümesi vardır. Demek ki x 'in k öğeli

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

tane altkümesi vardır. Teoremin kanıtlanması için,