Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Sezgisel Kümeler Kuramı III

Tümevarımla Kanıt

Çoğumuzun matematikle ilgisi aritmetikle başlamıştır. Kimimiz $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ eşitliğinden, kimimiz $3^2 + 4^2 = 5^2$ eşitliğinden, kimimiz de,

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1 = 1^2 \\ 1 + 3 & = 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 & = 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 & = 16 = 4^2 \end{array}$$

eşitliklerinden büyülenmişizdir. Sayılar kuramında her yaşa, her zevke göre büyü vardır.

Yukardaki eşitlikler raslantısal değildir: İlk n tek sayının toplamı her zaman bir karedir[1]. İlk n tek sayı $1, 3, 5, ..., 2n - 1$ olduğundan,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

dir. Bu eşitlik, sayılar kuramında **tümevarım** adı verilen bir yöntemle kanıtlanabilir.

Matematikte ve sayılar kuramında çok sık kullanılan bu yöntemde, kanıtlanmak istenen n doğal sayısıyla ilgili bir önerme, eşitlik, teorem, önsav, her neyse, önce 1 sayısı için kanıtlanır. Sonra, önermenin 1'den büyükeşit bir n doğal sayısı için geçerli olduğu varsayılarak, önerme bir sonraki sayı olan $n + 1$ sayısı için kanıtlanır. Böylece, önermenin tüm sayılar için geçerli olduğu anlaşılır. Çünkü, önerme 1 için doğrudur, 1 için doğru olduğundan 2 için de doğrudur, 2 için doğru olduğundan 3 için de doğrudur[2]...

Önermenin $n = 1$ için kanıtlanmasına "birinci adım" denir. Daha sonra, önermenin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlanmasına "tümevarım adımı" denir.

Tümevarımla kanıta örnek olarak yukardaki eşitliği kanıtlayalım.

Teorem 1. *Her n sayısı için, ilk n tek sayının toplamı n^2'dir.*

Kanıt: İlk n tek sayının toplamına $T(n)$ adı verelim. Yani,

$$T(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$$

olsun. $T(n) = n^2$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

Birinci Adım. Önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin doğru olup olmadığına bakalım. $T(1)$, 1'den 1'e kadar olan tek sayıların toplamıdır. Demek ki $T(1) = 1 = 1^2$ eşitlikleri geçerli ve $T(n) = n^2$ eşitliğimiz $n = 1$ için doğru.

Tümevarım Adımı. Şimdi, $T(n) = n^2$ eşitliğini doğru varsayıp, $T(n + 1) = (n + 1)^2$ eşitliğini kanıtlayalım. $T(n + 1)$ sayısı ilk $n + 1$ tek sayının toplamı, yani 1'den $2n + 1$'e kadar olan tek sayıların toplamı. İlk n tek sayının toplamı $T(n)$'dir ve varsayımımıza göre bu $T(n)$ sayısı n^2'ye eşit. Bir sonraki $n + 1$'inci tek sayıysa $2n + 1$. Demek ki,

$$\begin{aligned} T(n + 1) &= \text{İlk } n + 1 \text{ tek sayının toplamı} \\ &= (\text{İlk } n \text{ tek sayının toplamı}) + \\ &\qquad\qquad (n{+}1\text{'inci tek sayı}) \\ &= T(n) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

ve $T(n + 1) = (n + 1)^2$.

Demek ki $T(n) = n^2$ eşitliği doğruysa, $T(n+1) = (n+1)^2$ eşitliği de doğrudur.

Daha önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin de doğru olduğunu kanıtlamıştık.

Böylece her n sayısı için $T(n) = n^2$ eşitliği kanıtlanmış oldu. □

Tümevarımla kanıtın bir zayıf yanı, kanıtlanan önermenin neden doğru olduğunun pek iyi anlaşılamamasıdır. Önsezi kaybolmakta, mekanik bir kanıt verilmektedir. Ne demek istediğimi gene bir örnekle anlatayım. Yukardaki $T(n) = n^2$ eşitliğinin neden doğru olduğunu başka türlü göstereyim. Bir kenarı n uzunluğunda olan bir kare alalım. Bu karenin alanı n^2'dir. Kareyi n^2 tane küçük kareye bölelim. Şimdi kareleri şöyle sayalım. (Aşağıdaki şekle bakın.) Sol alt köşede 1 kare var. Bu kareye 3 kare dokunur: biri sağından, biri tepesinden, öbürü de sağ üst köşesinden (yani çaprazından.) Bu yeni kareye 5 yeni

1 Yazının ilk kısmında "sayı" sözcüğünü 1 ve 1'den büyük tamsayılar için kullanacağız, yani 1, 2, 3, 4, ... sayıları için.

2 Sayfa 44 ve 48-49'da tümevarımla kanıtın neden geçerli olduğunu kanıtlayacağız.

kare dokunur: ikisi sağından, ikisi tepesinden, biri de çaprazından. Sonra 7 yeni kare... İşte resim:

7	6	5	4
5	4	3	3
3	2	2	2
1	1	1	2

1, 3, 5, 7, ... Bunların toplamı küçük karelerin sayısına, yani n^2'ye eşit. Görüldüğü gibi ilk n tek sayının toplamı n^2'dir. Yukardaki önermenin neden doğru olduğu birden gün gibi ortaya çıktı. Ama matematiksel değil kanıtımız. Görme duyusuna dayanıyor.

Yukarda, tümevarımla kanıtı 1'den başlattık. Bir başka sayıdan, örneğin 0'dan da başlatabilirdik. O zaman önerme önce 0 sayısı için kanıtlanır (birinci adım), ardından, $n \geq 0$ için geçerli olduğu varsayılıp bir sonraki sayı olan $n + 1$ için kanıtlanır (tümevarım adımı).

Aşağıdaki teoremi iki değişik yöntemle kanıtlayacağız.

Teorem 2. *m öğeli bir kümenin altküme sayısı 2^m dir.*

Kanıta başlamadan önce okurun birkaç deney yapmasında yarar vardır. Örneğin, dört öğeli {0, 1, 2, 3} kümesinin teoreme göre 2^4, yani 16 altkümesi olmalı. Okur bunları teker teker bulmalı, sıfır öğesi olan boşkümeyi unutmadan...

Teorem 2'nin Birinci Kanıtı: x, n öğeli bir küme olsun. x'in altküme sayısını hesaplayacağız. x'in bir altkümesi, her küme gibi, elbette öğeleri tarafından belirlenir. Demek ki x'in bir altkümesini belirlemek için x'in hangi öğelerinin o altkümede olduğunu, hangilerinin olmadığını söylememiz gerekiyor, yani x'in her öğesi için "evet, bu öğe o altkümede" ya da "hayır, bu öğe o altkümede değil" diye iki karardan birini vermemiz gerekiyor. x'in bir altkümesini belirlemek için x'in her n öğesi için bu "evet" ya da "hayır" kararlarından birini vereceğiz.

Örneğin $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ise ve

0 için "evet" kararı
1 için "hayır" kararı
2 için "evet" kararı
3 için "evet" kararı
4 için "evet" kararı
5 için "hayır" kararı

vermişsek, x'in {0, 2, 3, 4} altkümesini elde ederiz.

x'in bir altkümesini belirlemek için, n kez iki karardan birini vereceğiz. Demek ki x'in altküme sayısı $2 \times 2 \times ... \times 2$ (n defa) dir, yani 2^n dir. □

Teorem 2'nin İkinci Kanıtı: Teoremi n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Birinci Adım. Eğer $n = 0$ ise, yani kümenin hiç öğesi yoksa, yani küme boşkümeyse, o zaman, kümenin sadece 1 tane altkümesi vardır, o da boşkümedir. $1 = 2^0 = 2^n$ olduğundan bu durumda teoremimiz kanıtlanmıştır.

Tümevarım Adımı. Şimdi teoremin öğesi olan kümeler için kanıtlandığını varsayıp (tümevarım varsayımı), teoremi n+1 öğesi olan kümeler için kanıtlayalım.

n+1 öğeli kümemize x diyelim. Kümenin öğeleri $a_1, ..., a_{n+1}$ olsun:

$$x = \{a_1, ..., a_{n+1}\}.$$

Ayrıca $y = \{a_1, ..., a_n\}$ olsun. Tümevarım varsayımı y'nin 2^n tane altkümesi olduğunu söylüyor.

x'in iki türlü altkümesi vardır: a_{n+1}'i içerenler ve içermeyenler. a_{n+1}'i içermeyenler aynı zamanda y'nin de altkümesi olduklarından, tümevarım varsayımına göre, bu tür altkümelerden 2^n tane olduğunu biliyoruz. a_{n+1}'i içermeyen bu 2^n altkümeye a_{n+1}'i de eklersek tam tamına x'in a_{n+1}'i içeren altkümelerini elde ederiz, ne bir fazla ne bir eksik...

Demek ki x'in, a_{n+1} öğesini içermeyen 2^n tane ve a_{n+1} öğesini içeren gene 2^n tane altkümesi vardır. Demek ki x'in toplam $2^n + 2^n$, yani 2^{n+1} tane altkümesi vardır. □

Şimdi, n öğeli bir kümenin kaç tane k öğeli altkümesi vardır sorusunu sorup yanıtlamak istiyoruz. Ama bu soruyu yanıtlamadan önce başka sorular soracağız.

Soru 1. *A, B ve C harflerinin herbirini birer kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız kaç sözcük yazabiliriz?*

Teker teker sıralayabiliriz sözcükleri: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Demek ki 6 tane yazabiliyoruz.

Soru 2. *A, B, C ve D harflerinin herbirini birer kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız kaç sözcük yazabiliriz?*

Sözcükleri gene teker teker sıralayabiliriz. Yukardaki gibi alfabetik sıraya dizmenin sonsuz yararları vardır. Yanıt 24'tür. □

Soru 3. *$A_1, A_2, ..., A_n$ birbirinden değişik harfler olsunlar. Bu harflerin herbirini birer kez kullanarak kaç sözcük yazabiliriz?*

Yukarda 3 için 6, 4 için 24 yanıtını bulduk. Okur herhalde $6 = 1 \times 2 \times 3 = 3!$ ve $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$ eşitliklerinin farkına varmıştır.

Yanıt $n!$ dir elbet. Ama neden?..

Birinci harf için n seçeneğimiz var. Birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye $n - 1$ seçenek kalıyor. İkinci harfi de seçtikten sonra geriye $n - 2$ seçenek kalıyor... Böylece n, $n-1$, $n-2$,... derken, en son harf için de 1 seçenek kalıyor. Demek ki toplam sözcük sayısı $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times ... \times 1$ dir, yani $n!$ dir. □

Bu sorunun tümevarımla kanıtını okur verebilir.

Not: Eğer $n = 0$ ise, $0!$ sayısı 1 olarak tanımlanır. Yukarda bulduğumuz yanıt $n = 0$ için de geçerlidir, yani 0 harfle tek bir sözcük yazılabilir, o da hiç harfi olmayan **boşsözcük**tür. Harfsiz boşsözcüğü harfleriyle yazamayacağımızdan, boşsözcük harfsiz olarak $\langle\ \rangle$ biçiminde yazılır.

Soru 4. *A, B, C, D, E, F harflerini birer kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız dört harfli kaç sözcük yazabiliriz?*

Teker teker alfabetik sıraya dizebiliriz eğer yeterince sabrımız varsa, ancak matematikle daha çabuk bulunabilir sözcük sayısı, ne de olsa sözcüklerin kendisi değil, sözcüklerin sayısı isteniyor sadece. Birinci harf için 6 seçeneğimiz var. Birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye 5 seçenek kalıyor. İlk iki harfi seçtikten sonra geriye 4 seçenek kalıyor. İlk üç harfi seçtikten sonra geriye dördüncü harf olarak 3 seçenek kalıyor. Demek ki doğru yanıt $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$'dır. □

Soru 5. *$A_1, A_2, ..., A_n$ birbirinden değişik harfler olsunlar. Bu harflerin herbirini birer kez kullanarak k harfli kaç sözcük yazabiliriz?*

Birinci harf için n seçeneğimiz var. Birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye $n - 1$ seçenek kalıyor. İlk iki harfi seçtikten sonra geriye $n - 2$ seçenek kalıyor. İlk üç harfi seçtikten sonra dördüncü harf için geriye $n - 3$ seçenek kalıyor. Bu böylecene k'ye kadar devam eder. En sonuncu $k$inci harf için geriye $n - k + 1$ seçenek kalıyor. Demek ki, toplam $n(n-1)(n-2)(n-3) ... (n - k + 1)$ seçenek var. Bu sayı da

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

sayısına eşittir. Demek ki n değişik harften

$$n!/(n-k)!$$

tane k harfli sözcük yazabiliriz. □

Bir önceki soruda olduğu gibi $n = 6$, $k = 4$ ise, daha önce bulduğumuz

$$\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

yanıtını buluruz.

Not: $k = 0$ alırsak, yukardaki yanıttan, n değişik harften bir tane sıfır harfli sözcük yazacağımızı buluruz, ki bu da doğrudur: Sıfır harfli sadece boşsözcük vardır.

Şimdi asıl sormak istediğimiz soruyu soralım: *n öğeli bir kümenin k öğeli kaç altkümesi vardır?*

Eğer $k > n$ ise hiç yoktur, yani yanıt 0'dır. Ama eğer $0 \leq k \leq n$ ise mutlaka n öğeli en az bir küme vardır.

Kümenin n öğesine $a_1, a_2, ..., a_n$ adını verelim. Yukardaki soruda bu n öğeden $n!/(n - k)!$ tane k harfli sözcük elde edeceğimizi gördük. Her k harfli sözcüğün harfleri k öğeli bir altküme oluşturur; ancak aynı harflerle yazılmış sözcüklerin harfleri aynı altkümeyi oluştururlar. Örneğin

$$a_1a_2a_3a_4 \text{ ve } a_3a_2a_4a_1$$

sözcükleri $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ altkümesini oluştururlar. Kaç sözcük aynı altkümeyi oluşturur, yani $\{a_1, ..., a_k\}$ altkümesini kaç değişik sözcükten oluşturabiliriz? Bu harflerle kaç sözcük yazılıyorsa o kadar! Yani $a_1, ..., a_k$ harfleriyle yazılan her $k!$ sözcük aynı altkümeyi, $\{a_1, ..., a_k\}$ altkümesini oluşturur.

k harfli $n!/(n - k)!$ sözcük olduğundan ve bunlardan $k!$ tanesi aynı altkümeyi oluşturduğundan, k öğeli altküme sayısını bulmak için $n!/(n - k)!$ sayısını $k!$ sayısına bölmemiz gerekir, demek ki k öğeli $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ tane altküme varmış.

$\binom{n}{k}$ sayısını eğer $0 \leq k \leq n$ ise $n!/k!(n - k)!$ olarak, diğer şıklarda da 0 olarak tanımlayalım:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{eğer } 0 \le k \le n \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n < k \text{ ya da } k < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu sayı n'nin k'lisi olarak okunur. Yukarda bulduklarımızdan şu çıkar:

Teorem 3. *n öğeli bir kümenin $\binom{n}{k}$ tane k öğeli altkümesi vardır.* □

Teorem 3'ün bir başka kanıtı: Aynı teoremi n üzerinden tümevarımla da kanıtlayabiliriz. n doğal sayısı verilmiş olsun. Ve $k = 0, 1, ..., n$ olsun.

Önce $n = 0$ için kanıtlayalım teoremi. $n = 0$ ise $k = 0$ olmalı. 0 öğeli bir kümenin 0 öğeli tek bir altkümesi vardır, o da boşkümedir.

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,(n-0)!} = 1$$

olduğundan, teorem $n = 0$ için doğru.

Şimdi teoremin n için doğru olduğunu varsayıp teoremi $n + 1$ için kanıtlayalım. x, $n + 1$ öğeli bir küme olsun. $k = 0, 1, ..., n + 1$ olsun.

Eğer $k = n + 1$ ise, x'in n+1 öğeli bir tek x altkümesi olduğundan yanıt 1'dir. Öte yandan,

$$\binom{n+1}{n+1} = 1$$

olduğundan teorem $k = n + 1$ için doğru.

Bundan böyle $1 \le k \le n$ eşitsizliklerini varsayacağız. $a \in x$, sabit bir öğe olsun. $y = x \setminus \{a\}$ olsun. Demek ki y'nin n öğesi var. x'in k öğeli iki türlü altkümesi vardır: a'yı içerenler ve içermeyenler. (Bu dediğimiz $k = 0$ ise de geçerlidir!) a'yı içermeyenler aynı zamanda y'nin de (k öğeli) bir altkümesidir. x'in a'yı içeren k öğeli altkümelerinden a'yı atarsak, geriye y'nin k–1 öğeli altkümeleri kalır. Tümevarım varsayımına göre y'nin k öğeli $\binom{n}{k}$ tane, $k - 1$ öğeli $\binom{n}{k-1}$ tane altkümesi vardır. Demek ki x'in k öğeli

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

tane altkümesi vardır. Teoremin kanıtlanması için,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$