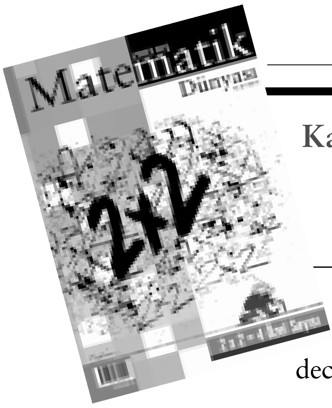


Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Sezgisel Kümeler Kuramı IV

Bileşim, Kesişim, Fark

Bu yazıda kümelerle yapılan üç önemli işlemden sözedeceğiz: bileşim, kesişim ve fark.

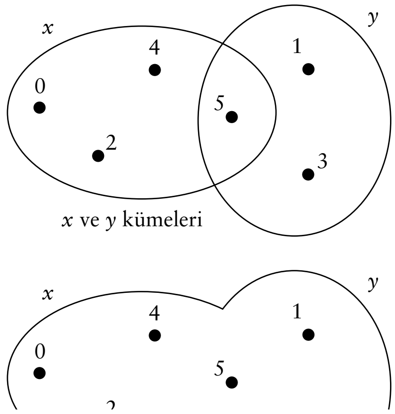
Bileşim. İki kümenin bileşimini almak çok kolaydır. Örneğin,

$$x = \{0, 2, 4, 5\} \text{ ve } y = \{1, 3, 5\}$$

ise, bu iki kümenin bileşimi

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesidir, yani iki kümenin en azından birinde olan öğelerin kümesidir. x ve y kümelerinin bileşimi $x \cup y$ olarak gösterilir.



x ve y kümeleri

Aşağıdaki ilişki ve eşitliklerin doğruluğunu kanıtlamak kolaydır:

1. **Değişim Özelliği** : $x \cup y = y \cup x$.
2. **Etkisiz Öğe** : $x \cup \emptyset = x$.
3. **İnvolütif İşlem** : $x \cup x = x$.
4. **Birleşme Özelliği** : $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$
5. $x \subseteq x \cup y$
6. $x \subseteq y \Leftrightarrow x \cup y = y$

Yukardaki dördüncü eşitlikten de anlaşılacağı gibi iki yerine üç, hatta daha fazla da kümenin bileşimini alabiliriz. x, y, z kümelerinin bileşimi $x \cup y \cup z$ olarak yazılır. Hatta hatta sonsuz sayıda kümenin de bileşimi alınabilir. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ için, $[0, n]$ kapalı aralıklarının bileşimini alabiliriz:

$$[0, 0] \cup [0, 1] \cup [0, 2] \cup [0, 3] \cup \ldots$$

Eğer a ve b gerçel sayılarsa, $[a, b]$ kümesi a'dan büyükeşit ve b'den küçükeşit gerçel sayılar kümesidir, yani $a \leq x \leq b$ eşitsizliklerini sağlayan gerçel sayıları içeren kümedir. Eğer $b < a$ ise, $[a, b] = \emptyset$. Ayrıca $[a, a] = \{a\}$ dır. Bu tür kümelere **kapalı aralık** adı verilir. Diğer aralıklar şöyle tanımlanır:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Bu sonuncu aralığa **açık aralık** denir. Sonsuz simgesinin yer aldığı aralıklar da aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$
$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

İlk üçü açık, son üçü kapalı aralıklardır.

Bu bileşim, $\mathbb{R}^{\geq 0}$ olarak yazılan negatif olmayan gerçel sayılar kümesidir. Yukardaki bileşimi daha kısa, daha anlaşılır ve daha fiyakalı bir biçimde,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}[0, n]$$

ya da

$$\bigcup_{n=0,1,2,\ldots}[0, n]$$

ya da

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, n]$$

olarak da gösterebiliriz.

Ne olduğunun anlaşılması biraz daha zor bir bileşim örneği verelim:

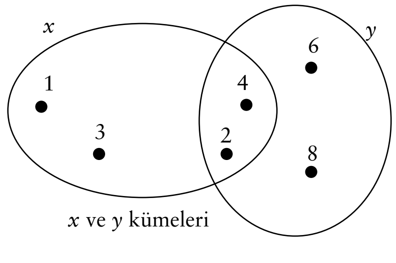
$$\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}[0, 1 - 1/n]$$

Bu küme $[0, 1)$ aralığına eşittir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

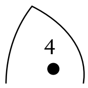
Kesişim. İki kümenin kesişimini almak da iki kümenin bileşimini almak kadar kolay. Örneğin,

$$x = \{1, 2, 3, 4\} \text{ ve } y = \{2, 4, 6, 8\}$$

ise, bu iki kümenin kesişimi $\{2, 4\}$ kümesidir. Yani iki kümenin kesişimi her iki kümede birden olan öğelerin kümesidir. x ve y kümelerinin kesişimi $x \cap y$ olarak yazılır.



x ve y kümeleri



Kesişimin aşağıdaki özelliklerini kanıtlamak kolaydır:

1. Değişim Özelliği : $x \cap y = y \cap x$
2. Etkisiz Öğe : $x \cap \varnothing = \varnothing$
3. İnvolütif İşlem : $x \cap x = x$
4. Birleşme Özelliği : $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$
5. $x \cap y \subseteq x$
6. $x \subseteq y \Leftrightarrow x \cap y = x$

Bileşim gibi, ikiden fazla kümenin de kesişimi alınabilir. Hatta sonsuz sayıda kümenin de kesişimi alınabilir. Örneğin, $[0, \infty)$, $[1, \infty)$, $[2, \infty)$, ... yarı kapalı yarı açık aralıkların kesişimi alınabilir. Bu kesişim,

$$[0, \infty) \cap [1, \infty) \cap [2, \infty) \cap \ldots$$

olarak yazılabileceği gibi,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)$$

olarak da yazılabilir. Bu sonsuz kesişimin boşküme olduğu belli, çünkü bu kesişimde olacak bir gerçel sayı, her doğal sayıdan daha büyük olmak zorunda, ki böyle bir gerçel sayı yok.

Kesişimle Bilişim Arasındaki İlişki. Kesişimle bileşim arasında ilişkiler vardır. Örneğin,

1. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$
2. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$
3. $x \cap \left(\bigcup_{i \in I} y_i\right) = \bigcup_{i \in I} (x \cap y_i)$
4. $x \cup \left(\bigcap_{i \in I} y_i\right) = \bigcap_{i \in I} (x \cup y_i)$
5. $\left(\bigcap_{i \in I} x_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} y_j\right) = \bigcap_{i \in I,\, j \in J} (x_i \cap y_j)$
6. $\left(\bigcup_{i \in I} x_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} y_j\right) = \bigcup_{i \in I,\, j \in J} (x_i \cap y_j)$

Fark. Eğer x *ve* y iki kümeyse, x'te olup da y'de olmayan öğelerden oluşan küme $x \setminus y$ olarak yazılır ve "x **fark** y" olarak okunur. Kanıtlaması kolay birkaç özellik:

$$x \setminus \varnothing = x$$
$$x \setminus x = \varnothing$$
$$x \setminus y = \varnothing \Leftrightarrow x \subseteq y$$
$$(x \setminus y) \cap y = \varnothing$$
$$(x \setminus y) \setminus z = x \setminus (y \cup z)$$
$$x \setminus (y \setminus z) = (x \setminus y) \cup (x \cap z)$$

Tümleyen. Eğer A diye bir küme önceden verilmişse, kimileyin, A'nın bir x altkümesi için, $A \setminus x$ yerine x^c yazılır. x^c kümesine x'in (A'daki) **tümleyeni** adı verilir. O zaman A'nın her x ve y altkümeleri için şu özellikler geçerlidir:

$$(x^c)^c = x$$
$$(x \cap y)^c = x^c \cup y^c$$
$$(x \cup y)^c = x^c \cap y^c$$

Alıştırmalar.

1. Aşağıdaki ilişkileri ve eşitlikleri kanıtlayın:

1a. $x \cap y = \varnothing \Leftrightarrow \wp(x) \cap \wp(y) = \{\varnothing\}$

1b. $\wp(x) \cup \wp(y) = \wp(z) \Leftrightarrow$ ya $x \subseteq y = z$ ya da $y \subseteq x = z$

1c. $\wp(x \cap y) = \wp(x) \cap \wp(y)$

2. Aşağıdaki kümeleri bulun:

2a. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n^2]$

2b. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots} [1/n, 1 - 1/n]$

2c. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots} (1/n, 1 - 1/n)$

2d. $\bigcup_{n \in N} (n, n^2)$

2e. $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots} [0, 1/n)$

2f. $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots} [-1/n, 1/n)$

2g. $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots} (-1/n, 1/n)$

2h. $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots} [-1/n, 1 + 1/n]$

3. x ve y kümeleri için, $x \Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ olarak tanımlansın. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:

3a. Birleşme Özelliği. $(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$

3b. Etkisiz Öğe. $x \Delta \varnothing = x = \varnothing \Delta x$

3c. Ters Öğe. $x \Delta x = \varnothing$

3d. Değişim Özelliği. $x \Delta y = y \Delta x$.

$x \Delta y$ kümesine x ve y'nin **simetrik farkı** adı verilir. ♣