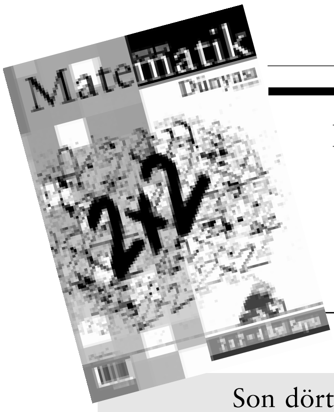


Kapak Konusu: 2 × 2 = 4

Russell Paradoksu

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Son dört yazıda yaptıklarımıza sezgisel kümeler kuramı denir. Sezgisel kümeler kuramında sayılar tanımlanmadan kabul edilir. 2 + 2 = 4 eşitliği sezgisel kümeler kuramında kanıta gerek kalmayacak kadar açıktır. Daha vahimi, sezgisel kümeler kuramında her türlü topluluk tartışılmadan küme olarak kabul edilir. 20. yüzyılın başlarında böyle bir yaklaşımın çok tehlikeli olduğu ve paradokslara neden olduğu anlaşıldı. Her topluluk küme olamaz, her topluluk küme olmamalı, olamamalı. Çünkü her topluluk küme olursa, 0 = 1 gibi saçmasapan bir eşitliği kanıtlayabiliriz, yani bir çelişki elde ederiz. Oysa matematikte çelişki hiç istemediğimiz bir şey. Onca güvendiğimiz matematik de çelişkiliyse, o da fos çıkarsa, biz neye güveneceğiz?

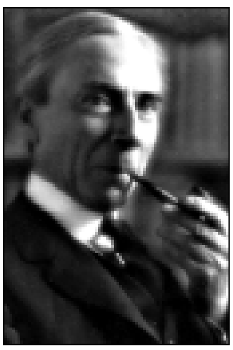
Önce yirminci yüzyılın başında Bertrand Russell tarafından bulunan paradoksu ele alacağız. Ardından bu paradoksun giderilmesi için alınan önlemlere değineceğiz. Göreceğiz ki her topluluk küme olamıyor, küme olmayı haketmek, küme olmaya hak kazanmak gerekiyor.

Bugün matematikçilerin çok büyük bir çoğunluğu tarafından kabul edilen ve büyük oranda Zermelo tarafından geliştirilen ve ZFC olarak kısaltılan Zermelo-Fraenkel-Seçim belitsel sistemini kısmen açıklayacağız. Bu sistemi kullanarak doğal sayıları ve toplamayı tanımlayacağız.

Amacımız kümeler kuramı değil; amacımız Peano Belitleri yazısında açıklanan ($\mathbb{N}$, S, 0) doğal sayılar yapısını bulmak, böyle bir yapının varlığını kanıtlamak. Kümeler kuramını işte bu yapının varlığını kanıtlamak için ne kadar gerekliyse o kadar açıklayacağız. Son derece ilginç bir konu olan kümeler kuramını bir başka sayıda ele alırız.

I. Giriş. Bu yazıda, geçen yüzyıl başında matematiği sarsan, hatta derin bir krize sokan bir paradokstan sözedeceğiz. Ama önce paradokslara genel bir bakış atacağız. Bilinen paradokslara bulunan çözümlerden sözedeceğiz.

Matematiğin temellerinin değişmesine neden olan paradoksu ünlü İngiliz filozof Bertrand Russell (1858-1932) bulmuştur. Russell paradoksunu paradoks olmaktan kurtaran kümeler kuramını daha sonraki yazılarda kısmen de olsa açıklayacağız.


Betrand Russell

II. Yamyam Paradoksu (Çatışkısı). Bilinen bilmecedir. Yamyamlar bir mantıkçı yakalarlar. Mantıkçıya şöyle derler:

– Biz her yakaladığımız yabancıyı yeriz. Kimini haşlayıp kimini kızartıp yeriz. Avımıza bir soru sorarız. Avımız soruyu doğru yanıtlarsa haşlarız, yanlış yanıtlarsa kızartırız.

Dedikleri gibi de yaparlar. Mantıkçıya bir soru sorarlar. Mantıkçı bir süre düşündükten sonra soruyu yanıtlar. Yanıtı duyan yamyamlar ne yapacaklarını şaşırırlar. Yanıt öylesine akıllı bir yanıttır ki, yamyamlar mantıkçıyı ne haşlar ne de kızartabilirler. Yamyamlar mantıkçıya ne sormuşlardır, mantıkçı soruyu nasıl yanıtlamıştır?

Yamyamlar mantıkçıya şu soruyu sormuşlardır:

– Seni haşlayıp mı, yoksa kızartıp mı yiyeceğiz?

Mantıkçı şöyle yanıtlamıştır:

– Kızartacaksınız!

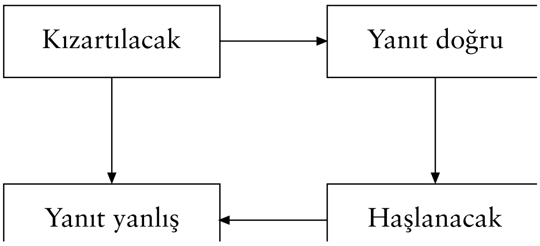
Bu soru ve yanıtla, mantıkçı ne haşlanır, ne de kızartılır.

Bir an, mantıkçının kızartılacağını varsayalım. O zaman mantıkçının yanıtı doğru olur. Ama yanıt doğru olduğundan – yamyamların kendi kural-

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü. Yazarın Matematik ve Korku adlı kitabındaki bir yazısından derlenmiştir.

larına göre – mantıkçının haşlanması gerekmektedir. Demek mantıkçı kızartılamaz.

Şimdi de mantıkçının haşlanacağını varsayalım. O zaman mantıkçının yanıtı yanlış olacak. Yanıt yanlış olduğundan da mantıkçının kızartılması gerekmektedir. Demek mantıkçı haşlanamaz.



Yamyamlar tam bir kısır döngüye girmişlerdir. Kızartsalar haşlamaları gerekecek, haşlasalar kızartmaları!

Sonuç olarak mantıkçı kurtulur[1].

Bu gibi durumlar "paradoksal" olarak nitelendirilir. "Saçma" bir durumdur. Çünkü mantıkçı ya kızartılacaktır ya haşlanacaktır; bunu önceden biliyoruz. Ayrıca yamyamların sorduğu soruya yanıt olarak iki seçenek vardır: Sorunun yanıtı ya doğru ya yanlış olmalıdır, bunu da biliyoruz. Oysa yukardaki sorunun yanıtı ne doğru ne yanlıştır; daha doğrusu yanıt doğruysa yanlış, yanlışsa doğrudur. Yani yanıtın doğruluğu ya da yanlışlığı yanıtın yanlışlığı ya da doğruluğuna bağlıdır!

Bertrand Russell, 50 yıldır üyesi olduğu İngiliz İşçi Partisi kartını basın önünde yırtarken. Parti Vietnam savaşını destekliyordu.

Bu paradoks nasıl çözülür, yani çelişki nasıl giderilir? Şöyle: Öyküde anlatıldığı gibi bir boy yoktur. Yani, yakaladıkları her yabancıyı yiyen ve yukardaki yöntemle yiyen bir boy yoktur.

Bu çözüme kimi okur karşı çıkabilir. Matematikçileri elindeki oyuncağı sevmeyip kıran, bilmecesini çözemeyip yırtan mızıkçı çocuklara benzetebilir. Ama bu, matematikçilere haksızlık olur. Şöyle düşünelim: Bilmecede şu şu özelliklere sahip bir boy vardır diyoruz. Öyle bir boyun olabileceğinden ilk başta kuşku duymayabiliriz, ancak görüyoruz ki böyle bir boyun varlığı bizi çelişkiye götürüyor. Dolayısıyla böyle bir boy olamaz.

III. Berber Paradoksu. Yukardaki paradoksa benzer paradoks çoktur. İşte bir tane daha:

Köyün birinde bir berber varmış. Bu berber, o köyde kendini traş etmeyen herkesi traş edermiş, kendini traş edenleriyse traş etmezmiş. Soru şu: bu berber kendini traş eder mi, etmez mi? Kendini traş etmezse, kendini traş etmeyen herkesi traş ettiğinden, kendini traş etmeli. Kendini traş ederse, kendini traş edenleri traş etmediğinden, kendini traş etmemeli.

Çözüm yukardaki gibi: Böyle bir berber olamaz.

IV. Kataloglar Paradoksu. Bu yüzyılın başında matematikçileri derin düşüncelere salan paradoksa geçmeden önce, o paradoksun bir benzerinden sözedelim.

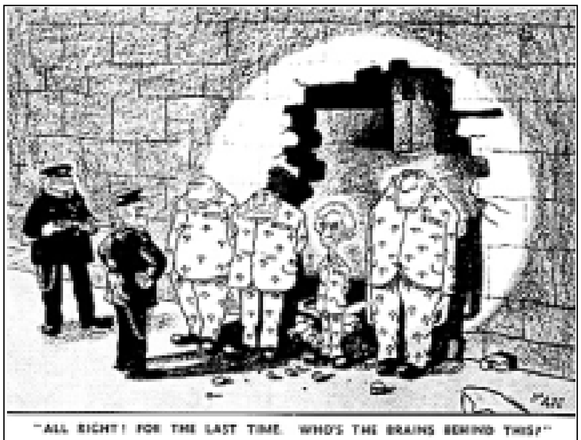
Matbaanın bulunuşundan sonra kitap sayısı çoğaldı doğal olarak. İlk kez ne zaman kataloglara gereksinildiğini bilmiyorum, ama birgün gereksinildi. Kitaplar çoğalınca, kataloglar da çoğaldı. Kataloglar çoğalınca katalogların da katalogları yapılmaya başlandı.

Bazı kitap katalogları kendi adlarını dizelgelerine (listelerine) almazlar, bazı kataloglarsa alırlar (katalog da bir kitap değil midir!) Örneğin kırmızı kapaklı kitaplar katalogunun kapağı kırmızı olacaksa katalog kendi adını dizelgeye alır, yoksa almaz. 200 sayfadan az kitaplar katalogu 200 sayfadan az olacaksa katalog kendi adını kataloga alır, yoksa almaz[2]. Bir yayıncının aklına "kendi adını içermeyen kataloglar katalogu" yapmak gelir. Bir sorun çıkar ortaya. Bu hazırlanmakta olan katalog kendi adını içermeli midir, içermemeli midir? Kendi adını içerse, katalogun türünden dolayı (kendi adını içermeyen kataloglar katalogu), adını içermemesi gerekir. Kendi adını içermese, yine katalogun türünden dolayı (kendi adını içermeyen kataloglar katalogu), kendi adını içermesi gerekir.

1 Eğer mantıkçı, "haşlayacaksınız," diye yanıtlasaydı, yamyamlar mantıkçıyı istedikleri gibi yiyebilirlerdi, ister haşlar, ister kızartırlardı ve bir çelişki doğmazdı.

2 Katalog kendi adını aldığından dolayı sayfa sayısı artıp 200 sayfayı aşarsa ve kendi adını almadığı takdirde 200 sayfayı aşmıyorsa ne olacak?!

Bir paradoks daha! Nasıl çözeceğiz? Hazırlanması bitmemiş bir katalogun katalog sayılamayacağını önermek bir çözüm müdür? Değildir (ama çözüme yaklaşır), çünkü hazırlanmakta olan katalogun adını "kendi adını içermeyen, yayımlanmış ya da hazırlanmakta olan kataloglar katalogu" diye değiştirirsek paradoks ortadan kalkmış olmaz.



- Son defa soruyorum: Bunun arkasındaki beyin kim? (Eylül 1961'de Russell'ın bir haftalık hapis cezası üzerine Evening Standard gazetesinde çıkan karikatür.)

Biz şu çözümü önereceğiz: Böyle bir katalog yapılamaz. Yukardaki çözümlerde de olduğu gibi tanımlanan nesnenin olamayacağını öne sürdük[3].

Böyle bir şey yapılabilir, ama yapılan bu şey bir katalog değil, olsa olsa bir matalog olur.

V. Matematikte Çelişki. "Matematikte çelişki" kavramı tarih boyunca değişmiştir. Yunanlılar, $\sqrt{2}$ sayısının kesirli sayı olmadığını anlayınca, önce çelişkinin doğada var olduğunu sanmışlar, daha sonra omuz silkip kesirli olmayan sayıların varlığını kabul etmek zorunda kalmışlardır.

Dinsel ve felsefi inançların da matematikçileri çelişkide bıraktığı olmuştur. Örneğin, sonsuz kavramı birçok matematikçiyi "çelişkiye" düşürmüştür. Zenon'un ünlü paradokslarının[4] herbiri "sonsuz" kavramından kaynaklanmıştır.

İnanç ve sezgilerle matematiğin çelişmesi, günümüzde kullanılan anlamıyla, matematikte bir çelişki değildir. Bugünkü anlamıyla matematikte çelişki, matematiksel bir tümcenin hem doğruluğunun hem de yanlışlığının kanıtlanmasıdır. Örneğin bugün matematikte kabul edilen belit (aksiyom) ve kanıtlama yöntemleriyle $2 \neq 2$ tümcesini kanıtlayabilirseniz o zaman bir çelişki elde etmiş olursunuz (çünkü "$2 = 2$" tümcesi matematikte bilinen bir teoremdir!)

Matematikte çelişki var mıdır? Bu soru matematikçileri uzun yıllar zorlamıştır. 1931'de Kurt Gödel matematikte çelişkinin olmadığını kanıtlamamızın olanaksız olduğunu kanıtlamıştır. Gödel'in bu teoreminden matematikte çelişki olmadığı sonucu çıkmaz. Gödel yalnızca matematiğin çelişkisiz olduğunun kanıtlanamayacağını kanıtlamıştır[5]. Yazımızın geri kalan bölümünde – sonradan giderilen – matematiksel bir çelişkiyi (paradoksu) konu edeceğiz.

Gödel ve Einstein

VI. Russell Paradoksunun Tarihçesi. Yukarda sözünü ettiğimiz paradoksların bir benzerini ünlü matematikçi ve filozof Bertrand Russell 1901'de, daha henüz 28 yaşındayken bulmuştur [R1, sayfa 101–107]. O günün matematiğinin çelişkiden yoksun olmadığını gösteren bu paradoks tahmin edileceği gibi matematiği ve matematikçileri sarsmış ve onları matematiğin temelleri üzerine daha derin düşünmeye zorlamıştır[6].

Russell paradoksunun ortaya çıkışı oldukça trajiktir. Yazmadan edemeyeceğim. Modern mantığın kurucularından sayılan Alman matematikçi ve mantıkçı Frege 1893'te **Aritmetiğin Temelleri** adlı ünlü yapıtının birinci cildini [Fre1] yayımla-

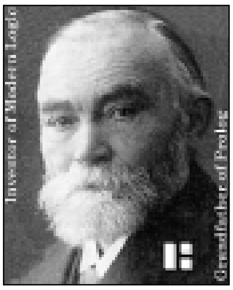
3 "Dünyanın En Güzel Katalogları" adında bir katalog var! ABD'de çıkan bu katalogun varlığını rahmetli Prof. Dr. Nazif Tepedelenlioğlu'ndan öğrendim.

4 MD 2003-III, sayfa 89-91.

5 Matematikte çelişki nasıl giderilir? Matematiği değiştirerek! Yani matematikte kabul edilen belitleri (aksiyomları) ve gerekirse kanıt yöntemlerini değiştirerek.

6 Aslında matematikte ilk ciddi çelişkiyi bulan Bertrand Russell değildi. 1897'da Burali-Forti (1861–1931) adında bir İtalyan matematikçi Russell paradoksunun bir benzerini bulmuştu [BF]. Burali-Forti paradoksundan Russell'ın haberi vardı. Hatta 1903'te Russell bu paradoksu ortadan kaldırdığını sanmıştı yanlışlıkla [R1, sayfa 43]. Bu yayınından iki yıl sonra, Russell, Burali–Forti paradoksunun kolay kolay giderilmeyecek önemli bir paradoks olduğunu kavramış ve [R2]'de paradoksu ortadan kaldırmanın yollarını aramıştır. Russell çözüme tipler kuramını bularak ulaşmıştır [R3]. Neden bugün Burali–Forti paradoksunun Russell paradoksu kadar tanınmış olmadığını bilmiyorum. Belki de Russell paradoksunun daha kolay anlaşılır olduğundandır.

mıştır. Bu yapıtında Frege aritmetiği sağlam temellere dayanan bir kümeler kuramına indirgemek istemiştir. İkinci cildin [Fre2] yazılması oldukça zaman alır. Belki de bu gecikmenin nedeni, matematikçilerin alışık olmadıkları bir dilde yazılan birinci cildin Frege'nin umduğu ve görmesi gereken ilgiyi görmemesidir. 1902'de yapıtın ikinci cildinin yazılması tamamlanmış ve baskıya verilme aşamasına geçilmiştir, hatta belki baskıya da verilmiştir. İşte tam bu sırada, 54 yaşındaki Frege, 30 yaşındaki Russell'dan "Sevgili Meslektaş" diye başlayan 16 Haziran 1902 tarihli bir mektup alır [H, sayfa 124–5]. Bu mektupta Russell, Aritmetiğin Temelleri'nin birinci cildini okuduğunu, çok yararlandığını, çok sevdiğini belirtir, Frege'yi göklere çıkarır, ikinci cildi dört gözle beklediğini söyler. Mektubun ortalarında da bulduğu paradoksu açıklar. Frege mektubu okuduğunda uğradığı düşkırıklığının boyutunu tahmin etmek zor olmasa gerek. Çok emek verdiği yapıtı ve yaşamını adadığı, temelini kurduğunu sandığı bilim birden yokolup gitmiştir. Kitapta temel değişiklikler yapması için çok geçtir. Bir sonsöz yazmakla yetinmek zorunda kalır. Frege, Russell'ın mektubunu 22 Haziran 1902 günü yanıtlar, yani Russell'ın mektubunu yazdığı günden tam altı gün sonra [H, sayfa 127–8]. Bu çok ilginç mektuptan alıntılar sunmak istiyorum:


Gottob Frege

Sevgili Meslektaş,

16 Haziran tarihli ilginç mektubunuz için çok teşekkür ederim. Benimle çoğu konuda aynı düşüncede olmanıza ve çalışmamı ayrıntılarıyla tartışmak istemenize sevindim. İsteğiniz üzerine aşağıda adlarını bulacağınız yayınlarımı yolluyorum.

[...]

Sizin elinizle yazıldığını sandığım boş bir zarf geldi postadan. Galiba bana bir şey göndermek istemiştiniz ve o şey yanlışlıkla kayboldu. Eğer kuşkum doğruysa inceliğiniz için teşekkür ederim. Zarfın ön yüzünü mektubuma iliştiriyorum.

[...]

Bulduğunuz çelişki beni çok büyük şaşkınlığa – belki büyük üzüntüye demek daha doğru olur – uğrattı, çünkü, aritmetik kuramını dayandırdığım temeli sarstı. Bana öyle geliyor ki [...] *beşinci kuralım yanlış (20. bölüm, sayfa 36), 31. bölümde sunduğum açıklamalar* [yeterli değil]. *Durum öylesine ciddi ki, 5. kuralın yanlışlığı, salt öne sürdüğüm temeli sarsmakla kalmıyor, galiba aynı zamanda aritmetiğin sağlam bir temele dayandırılamayacağını da gösteriyor.*

[...]

Her durumda buluşunuz çok önemli ve – şimdilik bir müjde niteliğini taşımasa da – ilerde mantıkta büyük ilerlemelere neden olabilir.

[...]

***Grundgesetze**'nin[7] ikinci cildi yakında çıkacak. Kitabın sonuna bulduğunuz çelişkiden sözeden bir ek yazacağım elbet. Keşke doğru bakış açısına sahip olsaydım[8].*

Saygılarımla,
G. Frege

Frege kitabının sonsözünün başında şöyle yazar:

Bir biliminsanı için, yapıtı biter bitmez temellerinin yıkılmasından daha korkunç bişey düşünülemez. Yapıt tam baskıya hazırlanırken Bay Bertrand Russell'dan aldığım bir mektup beni işte bu duruma soktu.

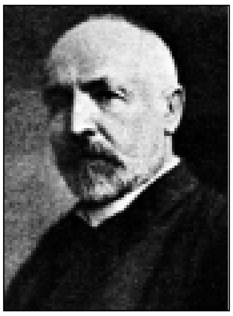
VII. Russell Paradoksu: Yazının bundan sonrasında Russell'ın bu paradoksunu açıklamaya çalışacağız[9].

Küme kavramı, Yunanlılardan beri aşağı yukarı biliniyordu. Daha sonra Alman Matematikçi Georg Cantor (1845–1918) küme kuramını matematiksel olarak ortaya attı. O zamanlar bir nes-

7 [Fre1, Fre2].

8 Mektubun aslı Almanca. Yukardaki çevirim [H]'deki İngilizce çeviriden. Son tümce İngilizce'ye şöyle çevrilmiş: "If only I had the right point of view for that!" Tam ne anlama geldiğinden emin değilim bu tümcenin. İki anlama gelebilir: Ya Frege kitabını yazarken Russell paradoksunu düşünemediğine hayıflanıyor ya da ek olarak ne yazacağını bilmiyor.

9 Russell paradoksu, Russell'dan bağımsız olarak Zermelo (1871–1953) tarafından da aşağı yukarı aynı tarihlerde bulunmuştur. 1908'de yayımlanan bir yazısına [Z1] Zermelo şöyle bir dipnot düşmüştür: "Bu paradoksu ben de Russell'den bağımsız olarak bulmuş ve 1903'te aralarında Profesör Hilbert'in de bulunduğu birkaç matematikçiye bildirmiştim."



Georg Cantor

nenin küme olabilmesi için birtakım koşulların gerektiği daha bilinmiyordu. Akla gelebilecek tüm nesnelerin bir küme oluşturabileceği sanılıyordu. Hele küme gibi çok "doğal" bir kavramın günün birinde matematiği çelişkiye düşüreceği akıllara hiç gelmiyordu. 19. yüzyılın sonuna dek, matematikçiler gördükleri, düşünebildikleri her matematiksel nesne topluluğuna küme adını vermekten çekinmediler. Tam sayılar kümesi, çift sayılar kümesi, bir düzlemin noktaları kümesi, bir düzlemin eğrileri kümesi, bir düzlemin dikdörtgenler kümesi, bu kümelerin bileşimi, bir kümenin altkümeleri kümesi… Her topluluk bir küme oluşturabilirdi. Hatta tüm kümeler topluluğu bile... Küme kavramı o zamanların matematikçileri için sezgisel bir kavramdı. Yıllar boyunca matematikçiler bir kümenin oluşması için kısıtlayıcı koşullara gerek görmediler. Biz de, şimdilik, kümeyi bu anlamda alalım: Herhangi bir öğeler topluluğuna küme adı verilir. Bakalım başımıza neler gelecek.

Eğer x bir kümeyse, x kümesinin belli bir özelliğe sahip öğeleri bir başka küme oluştururlar. x kümesinin bir altkümesidir bu yeni küme. Örneğin, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin "çift olma" özelliğini taşıyan öğeleri, $2\mathbb{N}$ olarak simgelenen çift doğal sayılar kümesini oluştururlar.

Tüm kümelerin bir küme oluşturduğunu varsayalım. Bu kümeye x adını verelim[10]. x kümesi "evrendeki" tüm kümeleri içeriyor. Yukardaki $\mathbb{N}$ kümesini de, $2\mathbb{N}$ kümesini de... Yani $\mathbb{N} \in x$ ve $2\mathbb{N} \in x$ matematiksel tümceleri doğru tümcelerdir. Daha genel olarak, eğer t herhangi bir kümeyse, "$t \in x$" matematiksel tümcesi doğrudur. x de bir küme olduğundan, "$x \in x$" matematiksel tümcesi de doğrudur. Demek, x kendi kendisinin bir öğesi. Öte yandan, $\mathbb{N}$ kümesi kendi kendisinin bir öğesi değil, çünkü $\mathbb{N}$ kümesinin öğeleri doğal sayılar ve $\mathbb{N}$ bir doğal sayı değil. Demek ki "$\mathbb{N} \in \mathbb{N}$" matematiksel tümcesi yanlış ve "$\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$" matematiksel tümcesi doğru.

Şimdi x kümesinin "kendini içermez" özelliğini taşıyan öğelerinden oluşan altkümeyi ele alalım. Bu kümeye y adını verirsek, y, kendini içermeyen kümeler kümesidir[11]. Yani y'nin öğeleri kendini öğe olarak içermeyen kümeler. Örneğin, yukardaki paragrafa göre, $x \notin y$, ama $\mathbb{N} \in y$.

Matematiksel olarak y'nin tanımı şöyle verilir:

$$y = \{z \in x : z \notin z\}.$$

Yani her z için,

$$z \in y \Leftrightarrow z \in x \text{ ve } z \notin z$$

önermesi doğrudur. Eğer z'nin bir küme olduğu biliniyorsa, sağdaki $z \in x$ koşulu kaldırabiliriz. Demek ki her z kümesi için,

$$z \in y \Leftrightarrow z \notin z$$

önermesi doğrudur. Burada z yerine y alalım, y bir küme olduğundan buna hakkımız var:

$$y \in y \Leftrightarrow y \notin y$$

önermesini elde ederiz. Bu, bariz bir çelişkidir.

Matematik yerine edebiyatı tercih edenler için: Sorumuz şu: y kümesi, y'nin bir öğesi midir? Yani y kümesi kendisinin bir öğesi midir? Önce y'nin kendi kendisinin bir öğesi olduğunu, yani "$y \in y$" matematiksel tümcesinin doğru olduğunu varsayalım. Eğer y, y'nin bir öğesiyse, o zaman y, y'nin bir öğesi olmamalı, çünkü y, bu tür kümeleri, yani kendisinin öğesi olan kümeleri içermiyor. Şimdi de y'nin kendi kendisinin öğesi olmadığını, yani "$y \notin y$" matematiksel tümcesinin doğru olduğunu varsayalım. O zaman (y kümesinin tanımına göre) y, y'nin bir öğesi olmalı. Her iki durumda da bir çelişki elde ettik.

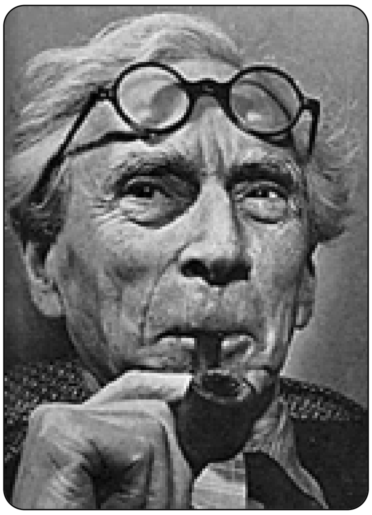
İşte Bertrand Russell'ın paradoksu.

VIII. Çelişki Nasıl Giderildi? Bu paradoks, kümeler kuramının öbür paradoksları gibi, bugün ortadan kalkmıştır. Kümeler kuramını değiştirmek, daha sağlam temellere oturtmak gerekmiştir bunun için. Bertrand Russell, paradoksunu ortadan kaldırmak amacıyla, 1908'de **tipler kuramı** adı verilen bir kuram ortaya atmıştı[12]. Tipler kuramı kümeleri derecelendirir. Örneğin, dördüncü dereceden bir kümeyi tanımlamak için ancak birinci, ikinci ve üçüncü dereceden kümeler kullanılabilir. Böylece yukarda x adını verdiğimiz, "tüm kümeler kümesi" diye bir küme matematikte yasaklanmış olur ve Russell'ın paradoksu paradoks olmaktan çıkar. Yani Russell akla gelen her nesnenin küme olmasını ya-

10 Kataloglar katalogu gibi, x de kümeler kümesi.

11 y kümesi, kendi adını içermeyen kataloglar katalogu gibi, kendi kendini öğe olarak içermeyen kümeler kümesi.

12 [R3]. Tipler kuramına benzer bir kuram [R1]'de de vardır. Ancak Russell bu konuda düşüncelerini bir süre terkedip, [R2]'de paradoksu çözmenin (ya da yok etmenin) başka yollarını aramıştır.



saklayarak, matematiği değiştirmiş, (şimdilik) çelişkisiz bir matematik yaratmıştır. Ünlü Fransız matematikçisi Poincaré'nin de dediği gibi, kurtlardan korumak için sürünün çevresine bir çit çekilmiştir, ancak, birazdan da göreceğimiz gibi, çitin içinde kurt olup olmadığını bilmiyoruz.

Russell'ın tipler kuramında çalışmak matematikçilere zor gelmiştir. Örneğin bu kuramda iki kümenin eşit olduğunu kanıtlamak için bin dereden su getirmek gerekir. Matematikçiler zor olan hiçbir şeyi sevmediklerinden, tipler kuramını daha basit bir kuramla değiştirmişlerdir[13].

IX. Matematikte Çelişki Var mıdır? Daha önce de belirttiğimiz gibi bugünkü matematik sisteminde çelişki olmadığını kanıtlayamayız[14]. Gödel kanıtladı bu olanaksızlığı. Peki, matematikte bir gün çelişki bulunursa ne olur? Çelişkisine bağlı elbet... Ama matematikçilerin genel kanısı şu: Gelecekte bir gün matematikte bir çelişki bulunursa, bu çelişki belitlerde ufak tefek bir iki değişiklikle giderilebilir; olası bir çelişki Matematik'i yıkamayacağı gibi, sarsamaz bile, olsa olsa şöyle biraz titretir. ♣

13 Kümeler kuramının belitlerine kapsama düzenlemesi (comprehension scheme) adı verilen bir belit eklenerek yapılmıştır bu değişiklik. Bu belite göre, eğer C bir kümeyse ve $\varphi(x)$ bir formülse, C'nin φ özelliğini taşıyan öğeleri de bir küme oluştururlar. Burada önemli olan φ özelliğini taşıyan "evrendeki" tüm öğelerin değil, yalnız C'dekilerin bir küme oluşturmasıdır. Yukardaki x nesnesi bu belite göre oluşturulmadığından, x'in küme olup olmadığından hemen emin olamayız ve bugünün matematiği eğer çelişkisizse x bir küme olamaz elbet, yoksa Russell paradoksuyla bir çelişki elde ederdik.

14 "Bugünkü matematik sistemi" demekle günümüz matematikçilerinin büyük çoğunluğunun kabul ettiği kümeler kuramı demek istiyorum. ZFC adı verilen bu kuramın ilk belitleri 1908'de Zermelo (ZFC'nin Z'si) tarafından bulunmuştur [Z2]. 1920'lerde Fraenkel [Fra] (ZFC'nin F'si), Skolem [S] ve Mirimanov [M] birbirinden bağımsız, yerleştirme beliti (axiom of replacement) adı verilen bir belitin eklenmesini önermişlerdir. ZFC'nin C'siyse seçim beliti (axiom of choice) adı verilen ve yüzyılımızın başında büyük kavgalara neden olan çok özel bir beliti simgeler. MD-I, sayfa 29-31.

Kaynakça

Bertrand Russell Gallery:
http://www.humanities.mcmaster.ca/~bertrand/
Bertrand Russell Archives:
http://www.mcmaster.ca/russdocs/russell1.htm#beginning
Bertrand Russell Research Center:
http://www.humanities.mcmaster.ca/~russell/
Bertrand Russell Society:
http://www.users.drew.edu/~jlenz/brs.html
Bertrand Russell Studies:
http://www.humanities.mcmaster.ca/~russell/journal.htm
Gottlob Frege, http://plato.stanford.edu/entries/frege/

[BF] Cesare Burali–Forti, *Una questione sui numeri transfiniti*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 8 (1897) 154–164. Yazının İngilizce çevirisi için [H]'ye bakınız.

[Fra] A.A. Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor–Zermeloschen Mengenlehre*, Math Ann 86 (1922) 230–237.

[Fre1] Gottlob Frege, **Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet**, 1. cilt, Olms, Almanya, 1893.

[Fre2] Gottlob Frege, **Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet**, 2. cilt Olms, Hildesheim 1903.

[H] Jean van Heijenoort, **From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic**, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, ABD, 1967.

[M] D. Mirimanov, *Les antinomies de Russell et de Burali–Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*, Enseig. Math. 19 (1917) 37–52.

[R1] Bertrand Russell, **The Principles of Mathematics**, 1. cilt, Cambridge University Press, Cambridge, İngiltere 1903.

[R2] Bertrand Russell, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, Proceedings of the London Mathematical Society 4 (1905) 29–53.

[R3] Bertrand Russell, *Mathematical logic as based on the theory of types*, American Journal of Mathematics 30 (1908) 222–262.

[S] T. Skolem, **Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls...**, Skrifter utgit av Videnskappsekkapet i Kristiania, I Klasse, 3 (Oslo 1919.)

[Z1] Ernst Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Mathematische Annalen 65 (1908) 107–128.

[Z2] Ernst Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Mathematische Annalen 65 (1908) 261–281.

$f(x) \notin x$

x herhangi bir küme olsun.

$$f(x) = \{y \in x : y \notin y\}$$

olsun. Russell paradoksundan esinlenerek, $f(x)$'in x'in bir öğesi olamayacağını kanıtlayacağız.

Tanımdan dolayı her y için şu önerme doğrudur:

$$y \in f(x) \Leftrightarrow y \in x \text{ ve } y \notin y.$$

Her y için doğru olan bu önerme, $y = f(x)$ için de doğrudur elbet, yani

$$f(x) \in f(x) \Leftrightarrow f(x) \in x \text{ ve } f(x) \notin f(x).$$

Dolayısıyla eğer belli bir x kümesi için $f(x) \in x$ doğru olsaydı, o zaman,

$$f(x) \in f(x) \Leftrightarrow f(x) \notin f(x)$$

önermesi de doğru olurdu, ki bu besbelli bir çelişkidir. Demek ki her x için $f(x) \notin x$.