Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Biraz Kümeler Kuramı ve Birkaç Doğal Sayı

Geçen yazıda her topluluğu küme sanmanın ne kadar kötü sonuçlar doğurduğunu gördük. Demek ki daha dikkatli olmalıyız, önümüze çıkan her topluluğa küme dememeliyiz. Neyin küme olduğuna belitlerle (aksiyomlarla) karar vereceğiz. Bu yazıda kümeler kuramının kolay birkaç belitini (aksiyomunu) sunacağız.

Asıl amacımız kümeler kuramı değil. Asıl amacımız doğal sayılar. Doğal sayıları matematiksel olarak tanımlamak istiyoruz. Bu ve sonraki yazılarda, doğal sayıları tanımlamak için ne kadar kümeler kuramı gerekiyorsa o kadar kümeler kuramı sunacağız. Ama gene de oldukça derin kümeler kuramı yapacağız.

Doğal sayılar dışında ayrıca toplamayı ve çarpmayı tanımlayıp $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ eşitliklerini kanıtlayacağız.

Başlıyoruz... Matematiğin daha en başındayız... Elimizde hiç küme yok... Kümeleri yavaş yavaş var edeceğiz.

Kümeler nasıl var olacaklar? Kümelere "var olun!" diyeceğiz ve kümeler var olacaklar. Kümelere "var olun!" emrini belitlerle (aksiyomlarla) vereceğiz. Ama bunu yaparken bütün kümeleri içeren bir kümenin de var olmamasına dikkat edeceğiz, çünkü böyle bir kümenin bizi çelişkiye (paradoksa) götürdüğünü geçen yazıda gördük.

İşte ilk emir:

1. Boşküme Beliti. *Hiç öğesi olmayan bir küme vardır.*

Yukardaki beliti okuyan okur, "öğe" ne demektir, "öğesi var ya da yok" ne demektir, "küme" ne demektir diye sorabilir... Herkes istediği soruyu sormakta özgürdür. Demokrasi var ülkede! Ama bu sorular sorulabilecek sorular olsa da yanıtlanamayacak sorulardır. "Küme" ve "öğesi olmak" kavramlarını tanımlamayacağız. Bu kavramları tanımlamadan kabul edeceğiz. Matematikte mutlaka tanımlanmamış kavramlar olmalıdır. İşte "küme" ve "öğesi olmak" kavramları matematiğin tanımlanmayan iki kavramıdır. Diğer tüm kavramları tanımlayacağız.

"Küme" adını vereceğimiz bazı soyut, anlamsız ve tanımlanmamış nesnelerin "öğeleri" olacak.

Okurun şaşıracağını sandığımız bir şey söyleyelim şimdi: Öğeler de bir küme olacaklar[1]. Her şey küme olacak... Öğeler de, 0, 1, 2, $\sqrt{2}$, π gibi sayılar da, fonksiyonlar da, toplama ve çarpma da, $\leq$ ilişkisi de... Kümeler kuramının tüm nesneleri kümedir.

Bazı kümeler bazı kümelerin öğeleri olacaklar, "öğesi olmak" ne demekse...

Eğer x ve y kümeyseler ve y kümesi x kümesinin bir öğesiyse, o zaman bunu

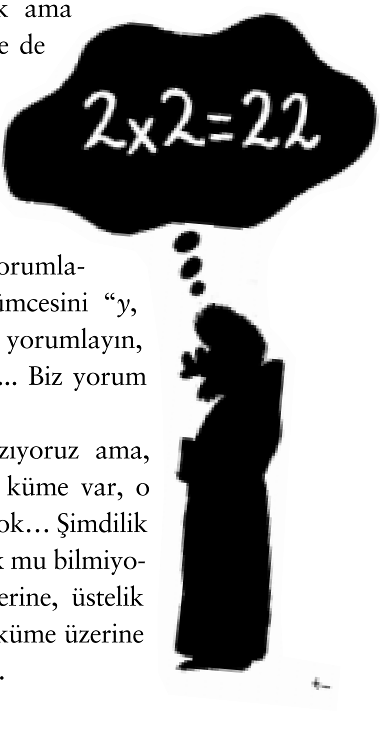
$$y \in x$$

yazılımıyla gösteririz. Eğer, tam tersine, y kümesi x kümesinin bir öğesi değilse bunu,

$$y \notin x$$

olarak gösteririz.

"Küme" ve "öğesi olmak" kavramlarının hiçbir anlamı olmayacak ama bu kavramları siz gene de sezgisel olarak istediğiniz gibi yorumlayabilirsiniz. Yorum serbest... İsterseniz "öğesi olmak"ı "çocuğu olmak" olarak yorumlayın, yani "$y \in x$" tümcesini "y, x'in çocuğu" olarak yorumlayın, bu size kalmış bir şey... Biz yorum yapmıyoruz.



Bütün bunları yazıyoruz ama, daha elimizde bir tek küme var, o kümenin de hiç öğesi yok... Şimdilik başka küme var mı yok mu bilmiyoruz. Bir tek küme üzerine, üstelik hiç öğesi olmayan bir küme üzerine koca bir sayfa yazdık...

1 İlk ve orta öğretimde öğelerin de küme oldukları öğretilmez. Ama öyledir. Kümeler kuramının tüm nesneleri kümedir.

Yukardaki belit, hiç öğesi olmayan bir kümenin varlığını söylüyor. Yani öyle bir x kümesi vardır ki, y hangi küme olursa olsun, $y \notin x$ diyor...

Şimdi soru şu: Hiç öğesi olmayan kaç küme vardır? Bir? İki? Üç? Sonsuz tane? Ya da böyle bir soru sormaya hakkımız var mı? Hiç öğesi olmayan kümelerden bir ya da birkaç tane olması bizim elimizde mi? Yoksa bu doğanın bir gereği mi?

Hiç öğesi olmayan tek bir küme olduğunu kanıtlamaya çalışalım, bakalım başaracak mıyız? Bence başaramayacağız[2]... Deneyelim ama:

2. Teorem. *Hiç öğesi olmayan tek bir küme vardır.*

Kanıt: x ve x_1 hiç öğesi olmayan iki küme olsun. x'in x_1'e eşit olduğunu göstermek istiyoruz...

Ama şimdiye kadar iki kümenin ne zaman birbirine eşit olduklarına dair herhangi bir şey söylemedik... Kümenin ne demek olduğunu bilmiyoruz ki iki kümenin eşitliği hakkında bir şey bilebilelim...

Eğer iki küme birbirine eşitse o iki kümenin aynı öğeleri vardır, yani birinde olan bir öğe diğerinindedir de; yani, her x, x_1 ve y kümesi için,

$$x = x_1 \Rightarrow (y \in x \Leftrightarrow y \in x_1)$$

önermesi doğrudur. Bu, matematiğin dayanağı ve temeli olan matematiksel mantığın kolay bir sonucudur: $x = x_1$ ise, x'le ilgili her doğru önerme (örneğimizde $y \in x$ önermesi) x yerine x_1 alırsak da doğrudur (örneğimizde $y \in x_1$ önermesi).

Bir sonraki belit eşitlik için **gerekli olan bu** koşulun aynı zamanda **yeterli** olduğunu söylüyor:

3. Eşitlik Beliti. *Aynı öğeleri olan iki küme birbirine eşittir.*

Bu, her x, x_1 ve y kümesi için,

$$(y \in x \Leftrightarrow y \in x_1) \Rightarrow x = x_1$$

demektedir.

Şimdi Teorem 2'nin kanıtına devam edebiliriz:

Teorem 2'nin kanıtının devamı: Hiç öğesi olmayan iki küme aldık, x ve x_1. Bu iki kümenin birbirine eşit olduklarını kanıtlamak istiyoruz. Belit 2'ye göre her ikisinin de aynı öğelere sahip olduklarını göstermek gerekiyor, yani birinin öğesinin diğerinde de olduğunu göstermeliyiz. Bu doğru olmasaydı, yani iki kümeden birinde diğerinde olmayan bir öğe olsaydı, o zaman iki kümeden birinde bir öğe olacaktı. Oysa kümelerde öğe yok… Bir çelişki elde ettik. Demek ki hiç öğesi olmayan tek bir küme var. □

Madem ki hiç öğesi olmayan **tek** bir küme var, o zaman bu kümeye bir ad verebiliriz. Hiç öğesi olmayan kümeye **boşküme** adını verelim. Boşküme $\emptyset$ simgesiyle gösterilir.

Buraya kadar sadece bir tek kümenin varlığını gösterebildik, $\emptyset$, onu da bir belitin yardımıyla yaptık. Başka kümeler de vardır belki evrende, ama bundan şimdilik hiçbir biçimde emin olamayız.

Şimdi 0'ı tanımlayalım:

4. Tanım. $0 = \emptyset$.

Bu tanımladığımız 0 matematiksel 0'dır, günlük yaşamda kullandığımız 0 değil. Örneğin, "0'ın sıfır öğesi vardır" tümcesindeki birinci 0 matematiksel 0'dır, ikincisiyse Türkçe sıfır'dır.

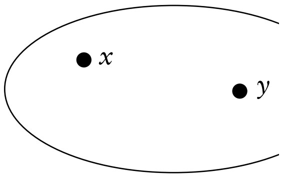
1'i $\{0\}$ olarak tanımlamak istiyoruz ama böyle bir kümenin varlığından emin değiliz. Hemen bu sorunumuzu halledelim:

5. İki Öğeli Küme Beliti. *Eğer x ve y birer kümeyse, öğe olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*

Öğe olarak sadece x ve y'yi içeren kümeyi

$$\{x, y\}$$

olarak yazarız. Eğer $x = y$ ise, $\{x, y\}$ yerine $\{x\}$ yazarız, iki defa x yazmanın ne anlamı olabilir ki?



Yukarıdaki belitte $x = y = 0$ alırsak, $\{0\}$ kümesinin varlığını göstermiş oluruz ve böylece 1'i de $\{0\}$ kümesi olarak tanımlama hakkını elde ederiz.

6. Tanım. $1 = \{0\}$.

Eğer $x = 0$, $y = 1$ alırsak, o zaman Belit 5'ten $\{0, 1\}$ kümesinin varlığı anlaşılır ve 2'yi de bu küme olarak tanımlayabiliriz.

7. Tanım. $2 = \{0, 1\}$.

2 Boşküme ve Altküme yazısında sayfa 19'da bunu kanıtlamayı başarmıştık, ama tabii o yazıda konuyu sezgisel olarak ele almıştık. Burada, aynı kanıtı daha biçimsel olarak, daha dikkatlice sunacağız.

Aynı belitten {0, 2} ve {1, 2} kümelerinin de varlığı anlaşılır. Bundan da {{0, 2}, {1, 2}} kümesinin varlığı çıkar. Bu belit sayesinde 1 ve 2 öğeli sonsuz sayıda küme yaratabiliriz.

Daha önce {{0, 2}, {1, 2}} diye bir şey vardı, yok değildi, ama adına küme denmeye hak kazanmamıştı. Belit 3 bu şeye küme payesini veriyor. Kolay değildir küme olmak.

0'ın sıfır, 1'in de bir öğesi olduğundan, $0 \neq 1$. Ne mutlu bize! Dolayısıyla 2'nin iki öğesi var ve $0 \neq 2$, $1 \neq 2$.

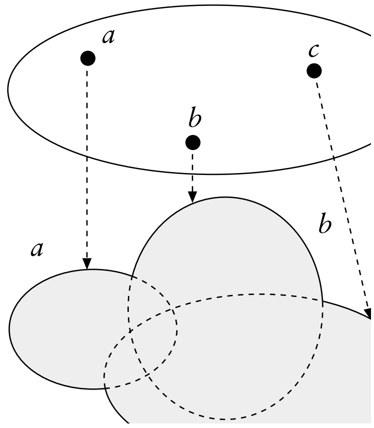
Belit 5 yoluyla elde edilecek tüm kümelerin en fazla iki öğesi olduğundan, yukarda verdiğimiz üç belit {0, 1, 2} kümesinin varlığını kanıtlamaya yeterli değildir. Böyle bir kümenin varlığını kanıtlamak için yeni bir belite ihtiyacımız var. Ama önce biraz edebiyat yapalım.

"Bileşim, Kesişim, Fark" adlı yazıda iki ya da daha çok kümenin bileşimini almayı öğrendik. Yalnız kümelerinin bileşimini alırken dikkatli olmak gerekir, yanlış bir bileşim bizi çelişkiye götürebilir.

Genellikle, bileşim alırken sınıftaki öğretmenin ve sokaktaki adamın gözden kaçırdığı ince bir nokta vardır: Kümelerin bileşiminin bir küme olması için bileşimi alınacak kümelerin bir küme oluşturması gerekmektedir, yoksa bileşim küme olmayabilir. Örneğin x, y, z kümelerinin bileşiminden bir **küme** olarak söz edebilmek için $\{x, y, z\}$ diye bir küme olmalıdır. Eğer $\{x, y, z\}$ diye bir küme yoksa, $x \cup y \cup z$ bir küme olmayabilir, bir şey olur ama bu şey başka bir şey olabilir, küme adını almaya daha hak kazanmamış bir şey olur. Eğer bileşimi dikkatsizce alırsak bir çelişki elde ederiz ve matematikte çelişki hiç arzulanmayan bir şeydir.

Bir sonraki belitle, bir kümenin öğelerinin bileşimini alıp yeni bir küme elde etmemize olanak sağlayacağız. Beliti yazmadan önce tam ne istediğimizi biraz daha açık bir biçimde açıklayalım.

x, aşağıdaki şekildeki gibi bir küme olsun. x'in birtakım öğeleri var, diyelim x'in üç öğesi var: a, b ve c. Öğe sayısı sonsuz da olabilir, biz sadece üç öğeli bir küme aldık. Her öğe gibi bu a, b, c öğeleri de birer küme. Aşağıdaki resimde a, b ve c hem bir öğe olarak (bir nokta), hem de bir küme olarak resmedilmiş (gri yumurtalar). İşte bir sonraki belitle, x kümesini oluşturan bu a, b, c öğelerinin bileşimini alarak yeni bir küme elde etmenin yolunu açacağız. Bu bileşim, x'in öğelerinin (a, b ve c'nin) öğelerinden oluşacak.



Yani belit şunu diyecek: x hangi küme olursa olsun, öyle bir y **kümesi** vardır ki, her z kümesi için, $z \in y$ ancak ve ancak $z \in t \in x$ koşullarını sağlayan bir t varsa.

Eğer bir kümenin öğelerini o kümenin çocukları olarak yorumlarsak, bir kümenin öğelerinin bileşiminin öğeleri, bileşimi alınan kümenin torunları olur. Resimde, a, x'in bir çocuğu; z de a'nın bir çocuğu. Yani z, x'in bir torunu. Bu metaforla, x'in öğelerinin bileşimi x'in torunlarından oluşan küme demektir.

8. Bileşim Beliti. *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in öğelerinin öğelerinden oluşan bir küme vardır.*

Bu kümeye x'in **bileşimi** adı verilir. x'in **bileşimi** $\bigcup x$ ya da

$$\bigcup\nolimits_{t \in x} t$$

olarak yazılır. Örneğin,

$\bigcup\{a, b, c\} = a \cup b \cup c$

$\bigcup\{\{0, 1\} \{0, 2\}, \{1, 2\}\} =$

$\{0, 1\} \cup \{0, 2\} \cup \{1, 2\} = \{0, 1, 2\}$

$\bigcup\{a\} = a$

Şimdi, yukardaki belitleri kullanarak {0, 1, 2} diye bir kümenin varlığını kanıtlayabiliriz:

i. $0 = \emptyset$ olduğundan, 0 bir kümedir.

ii. $1 = \{0\}$ olduğundan, Belit 5'e ve i'e göre 1 bir kümedir.

iii. $2 = \{0, 1\}$ olduğundan, Belit 5'e, i ve ii'ye göre 2 bir kümedir.

iv. Belit 5'e ve iii'e göre {2} bir kümedir.

v. Belit 5'e ve iii ve iv'e göre {2, {2}} bir kümedir.

vi. Belit 8'e göre, $\bigcup\{2, \{2\}\}$, yani

$$2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

bir kümedir.

Bundan böyle 3'ü {0, 1, 2} kümesi olarak tanımlıyoruz.

Okur alıştırma olarak {0, 1, 2, 3}'ün de bir küme olduğunu kanıtlayabilir.

9. Tanım. $3 = \{0, 1, 2\}$

10. Tanım. $4 = \{0, 1, 2, 3\}$

11. Tanım. $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Bu tanımları sürdürüp 6'yı, 7'yi, 8'i tanımlayabiliriz. Ama sayıları tek tek sonsuza dek tanımlamaya zamanımız olmadığına göre, bir yerde durup, genel bir tanım vermenin yollarını aramalıyız.

Bu tanımlara bir kez daha dikkatlice bakalım:

$5 \overset{(11)}{=} \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} \overset{(10)}{=} 4 \cup \{4\}$,

$4 \overset{(10)}{=} \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} \overset{(9)}{=} 3 \cup \{3\}$,

$3 \overset{(9)}{=} \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} \overset{(7)}{=} 2 \cup \{2\}$,

$2 \overset{(7)}{=} \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} \overset{(6)}{=} 1 \cup \{1\}$,

$1 \overset{(6)}{=} \{0\} = \varnothing \cup \{0\} \overset{(4)}{=} 0 \cup \{0\}$.

Özetle:

$$5 = 4 \cup \{4\},$$
$$4 = 3 \cup \{3\},$$
$$3 = 2 \cup \{2\},$$
$$2 = 1 \cup \{1\},$$
$$1 = 0 \cup \{0\}.$$

Görüldüğü gibi "bir sayının ardılı" (her ne demekse!), o sayıyla sadece o sayıdan oluşan kümenin bileşimi. Örneğin, 5, 4 kümesiyle 4'ten oluşan $\{4\}$ kümesinin bileşimi.

Yukardaki yöntemi 5'e uygulayıp 6'yı tanımlayalım:

12. Tanım. $6 = 5 \cup \{5\}$.

Bakalım, öğeleriyle yazınca 6 ne oluyor?

$$6 \overset{(12)}{=} 5 \cup \{5\} \overset{(11)}{=} \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\}$$
$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

yani

$$6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \qquad (12.1).$$

6 da kendisinden önce gelen sayılar kümesi oldu.

Eğer x bir kümeyse, $S(x)$'i şöyle tanımlayalım:

13. Tanım. $S(x) = x \cup \{x\}$.

Her şey küme olmak zorunda olduğundan, x bir kümeyse, $S(x)$ de bir küme olmalı. Hemen kanıtlayalım bunu:

Teorem. *x bir kümeyse $S(x)$ de bir kümedir.*

Kanıt: Üç adımda kanıtlayacağız:

a. x bir küme olduğundan Belit 5'e göre $\{x\}$ bir kümedir.

b. x ve $\{x\}$ birer küme olduğundan, gene Belit 5'e göre $\{x, \{x\}\}$ bir kümedir.

c. Belit 8'e ve (b)'ye göre $\bigcup\{x, \{x\}\}$, yani $x \cup \{x\}$, yani $S(x)$ bir kümedir. □

Eğer n bir "doğal sayıysa", $S(n)$'ye ***n*'nin ardılı** adını verelim[3]. Yukarda da görüldüğü üzere, 6, 5'in ardılı.

6'nın ardılı, tanımı gereği $S(6)$'dır:

$$S(6) \overset{(13)}{=} 6 \cup \{6\} \overset{(12.1)}{=} \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6\}$$
$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Bundan böyle S(6)'ya 7 adını verelim.

Görüldüğü gibi,

13.1. $S(0) = 1$,
13.2. $S(1) = 2$,
13.3. $S(2) = 3$,
13.4. $S(3) = 4$,
13.5. $S(4) = 5$,
13.6. $S(5) = 6$,
13.7. $S(6) = 7$.

Dikkat edilirse henüz genel bir doğal sayı kavramı tanımlamadık. Bunu daha sonraki yazılarda yapacağız. Şimdilik şu kavramları tanımladık: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, $S(x)$ ve "tanımlanmamış bir doğal sayının ardılı", doğal sayı kavramını tanımlamadan...

$S(n) = n + 1$ eşitliğini şu anda kanıtlayamayız. Çünkü + diye bir işlem daha tanımlamadık. Bu işlemi hemen tanımlayalım. Önce $n + 0$ işlemini tanımlayalım:

14. Tanım. $n + 0 = n$.

Dikkat: Bu tanımdan $0 + n = n$ eşitliği çıkmaz. Şimdilik kanıtlayamayız bu eşitliği. Ama daha sonra başka yazılarda kanıtlayacağız. Zamanla...

0'la toplamasını yukardaki tanımda öğrendik. Toplamayı tanımlamaya devam edelim. Bir sonraki tanımda, $n + m$ işleminin sonucunu biliyorsak, $n + S(m)$ işleminin sonucunu da bildiğimizi göreceğiz, yani m doğal sayısıyla toplamasını biliyorsak, m'nin ardılı olan $S(m)$ ile de toplamasını bildiğimizi göreceğiz:

15. Tanım. *Eğer $n + m$ tanımlanmışsa*, $n + S(m) = S(n + m)$.

$S(n) = n + 1$ eşitliğini kanıtladığımızda (bir sonraki teorem), yukardaki tanım

3 Doğal sayı kavramını daha tanımlamadığımıza dikkatinizi - çekerim. Sadece **birkaç** doğal sayı tanımladık. Doğal sayı kavramını ve doğal sayılar kümesini daha sonra tanımlayacağız.

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1$$

anlamına gelecek.

Yukardaki tanımı kullanarak artık birsürü teorem kanıtlayabiliriz[4]:

16. Teorem. $S(n) = n + 1$.

Kanıt: $n + 1 \overset{(13.1)}{=} n + S(0) \overset{(15)}{=} S(n + 0) \overset{(14)}{=} S(n)$. □

Yukardaki teoremi 0'a, 1'e, 2'ye ve tanımladığımız diğer sayılara uygularsak (13) eşitliklerinden şu sonuçlar çıkar:

16.1. $0 + 1 \overset{(16)}{=} S(0) \overset{(13.1)}{=} 1$

16.2. $1 + 1 \overset{(16)}{=} S(1) \overset{(13.2)}{=} 2$

16.3. $2 + 1 \overset{(16)}{=} S(2) \overset{(13.3)}{=} 3$

16.4. $3 + 1 \overset{(16)}{=} S(3) \overset{(13.4)}{=} 4$

16.5. $4 + 1 \overset{(16)}{=} S(4) \overset{(13.5)}{=} 5$

16.6. $5 + 1 \overset{(16)}{=} S(5) \overset{(13.6)}{=} 6$

16.7. $6 + 1 \overset{(16)}{=} S(6) \overset{(13.7)}{=} 7$

Artık $2 + 2 = 4$ eşitliğini kanıtlama zamanı geldi:

17. Teorem. $2 + 2 = 4$.

Kanıt: $2 + 2 \overset{(13.2)}{=} 2 + S(1) \overset{(15)}{=} S(2 + 1) \overset{(16.3)}{=} S(3) \overset{(13.4)}{=} 4$. □

Şimdi çarpmaya geçelim. Önce 0'la çarpmayı öğreneceğiz, ardından, m'yle çarpmasını ve toplamayı bildiğimizi varsayarak, $S(m)$ ile çarpmasını öğreneceğiz.

18. Tanım. $n \times 0 = 0$.

19. Tanım. *Eğer $n \times m$ ve $n \times m + n$ tanımlanmışsa,* $n \times S(m) = n \times m + n$.

Teorem 16 ve yukardaki tanımdan $n \times (m + 1) = n \times m + n$ çıkar[5].

Şimdi $n \times 1 = n$ eşitliğini kanıtlamaya çalışalım:
$n \times 1 \overset{(13.1)}{=} n \times S(0) \overset{(19)}{=} n \times 0 + n \overset{(18)}{=} 0 + n = \ldots$

Takıldık. Çünkü $0 + n = n$ eşitliğini bilmiyoruz. Bizim bildiğimiz sadece $n + 0 = n$ eşitliği, $0 + n = n$ eşitliği değil. $0 + n = n$ eşitliğini daha sonra kanıtlayacağız, şimdi kanıtlayamayız. Bu eşitliği şimdilik kanıtlayamayız ama, 16.1'den $0 + 1 = 1$ eşitliğini bildiğimizden, $1 \times 1 = 1$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

20. Teorem. $1 \times 1 = 1$.

Kanıt: $1 \times 1 \overset{(13.1)}{=} 1 \times S(0) \overset{(19)}{=} 1 \times 0 + 1 \overset{(18)}{=} 0 + 1 \overset{(16.1)}{=} 1$.

Şimdi $2 \times 2 = 4$ eşitliğini kanıtlamaya çalışalım:

$$2 \times 2 \overset{(13.2)}{=} 2 \times S(1) \overset{(19)}{=} 2 \times 1 + 2.$$

Demek ki sonuca ulaşmak için önce $2 \times 1 = 2$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım:

$$2 \times 1 \overset{(13.1)}{=} 2 \times S(0) \overset{(19)}{=} 2 \times 0 + 2 \overset{(18)}{=} 0 + 2.$$

Demek ki daha önce $0 + 2 = 2$ eşitliğini kanıtlamamız gerekiyormuş:

$0 + 2 \overset{(13.2)}{=} 0 + S(1) \overset{(15)}{=} S(0 + 1) \overset{(16.1)}{=} S(1) \overset{(13.2)}{=} 2$.

Şimdi artık $2 \times 2 = 4$ eşitliği kanıtlanmıştır. Teoremi ve kanıtını (bir defa daha) yazalım.

21. Teorem. $2 \times 2 = 4$.

Kanıt: $2 \times 2 \overset{(13.2)}{=} 2 \times S(1) \overset{(19)}{=} 2 \times 1 + 2 \overset{(13.1)}{=} 2 \times S(0) + 2 \overset{(19)}{=} (2 \times 0 + 2) + 2 \overset{(18)}{=} (0 + 2) + 2 \overset{(13.2)}{=} (0 + S(1)) + 2 \overset{(15)}{=} S(0 + 1) + 2 \overset{(16.1)}{=} S(1) + 2 \overset{(13.2)}{=} 2 + 2 \overset{(17)}{=} 4$. □

22. Sonuç. Bu yazıda 0, 1, 2, 3, 4 sayılarını ve + ve × işlemlerini tanımlayıp $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ eşitliklerini kanıtladık. Görüldüğü gibi tanımlarımızın elmalarla armutlarla, deneyle, dış dünyayla hiçbir ilgisi yok. Her şey zihinsel ve en soyut düzeyde.

Alıştırmalar.

1. a_1, a_2, a_3 küme olsunlar. $\{a_1, a_2, a_3\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. Genel olarak $a_1, \ldots, a_n$ kümeyse $\{a_1, \ldots, a_n\}$ topluluğunun küme olduğunu kanıtlayın.

2. $\cup\varnothing = \varnothing$ eşitliğini kanıtlayın.

3. $4 + 3 = 7$ ve $3 + 4 = 7$ eşitliklerini kanıtlayın.

4. $3 \times 2 = 6$ ve $2 \times 3 = 6$ eşitliklerini kanıtlayın.

5. n^m işlemini ve 8 sayısını tanımlayıp $2^3 = 8$ eşitliğini kanıtlayın.

6*. Buraya kadar verilen belitlerle sonsuz sayıda öğesi olan bir kümenin varlığının kanıtlanamayacağını kanıtlayın. ♣

4 Yukardaki tanımda (Tanım 15'te) bir şey eksiktir. Eksikliği bir sonraki yazıda ifşa (!) edeceğiz. Tanım doğrudur, ancak tanımın kabul edilebilir bir tanım olması için özellikle gözden uzak tutmaya çalıştığımız bir olgu vardır ve bu olgu tanımın geçerli olduğunun gösterilmesi için kanıtlanmalıdır. Okur, daha fazla düşünmeden tanımı kabul etsin ve bir sonraki yazıya kadar sabretsin.

5 Toplama için çıtlattığımız sorun çarpmanın tanımında da var. Bu sorunları bir sonraki yazıda ortaya koyup çözeceğiz.