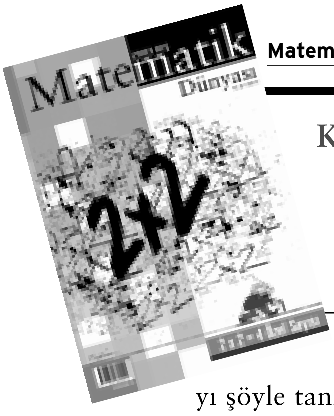


Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Temellendirme Beliti

Bir önceki yazıda toplamayı şöyle tanımlamıştık:

Tanım. $x + 0 = x$.

Tanım. *Eğer* $x + y$ *biliniyorsa*, $x + S(y) = S(x + y)$.

Anımsatırız: $S(x)$ de $x \cup \{x\}$ anlamına geliyordu.

Yukardaki ikinci tanımda ilk anda dikkat çekmeyebilecek çok önemli bir sorun var. O da şu: x ile $S(y)$'nin toplamının sonucunun $S(x + y)$ olacağını söylüyoruz. Buna hakkımız var mı? Olmayabilir... Şöyle bir durum ortaya çıkabilir:

$S(y) = S(z)$ eşitliği geçerli olabilir ve $x + y$ ve $x + z$ de biliniyordur, ama

$$S(x + y) \neq S(x + z)$$

dir. O zaman,

$$S(x + y) = x + S(y) = x + S(z) = S(x + z)$$

eşitliklerinden bir çelişki elde ederiz.

Bir başka deyişle, $S(y)$ ile ilgili

$$x + S(y) = S(x + y)$$

eşitliğinin sadece $S(y)$'ye göre değişmesi gerekir, y değiştiğinde $S(y)$ değişmiyorsa, $x + S(y)$'nin önerilen tanımının da, yani $S(x+y)$'nin de değişmemesi gerekir.

Sorun tam anlaşılamayabilir, çünkü kolay kolay anlaşılacak bir sorun değil parmak bastığımız sorun, ama anlaşıldığında da boy uzatır. Bir başka yolla anlatmaya çalışalım:

Diyelim ki $x + \beta$ toplamını yapmak istiyorsunuz... Düşünüyorsunuz... Kısa bir zaman içinde β'nın $S(y)$'ye eşit olduğunu anlıyorsunuz. Hemen ardından da, tanımdan,

$$x + \beta = x + S(y) = S(x + y)$$

eşitliklerini çıkarıyorsunuz. Şimdi $x + y$ sayısını hesaplamanız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Sonra S'nin tanımından hareketle $S(x + y)$'yi kolayca $(x + y) \cup \{x + y\}$ olarak buluyorsunuz. Her şey yolunda. Şimdilik...

Ertesi gün bu buluşunuzu bir arkadaşınıza göstermek istiyorsunuz. Ne var ki kanıtınızı unutmuşsunuz. Kanıtınızı unutmuşsunuz ama kafanız yerinde. Gene düşünüyorsunuz. Kısa bir zaman içinde β'nın $S(z)$ olduğunu anlıyorsunuz. Bir önceki gün β'nın $S(y)$ olduğunu bulmuştunuz ama bunu unutmuşsunuz, bugün β'yı $S(z)$ olarak buldunuz... Tabii bunun böyle olması için $S(y) = S(z)$ olmalı. Demek öyle, neden olmasın!.. Aynen bir önceki gün olduğu gibi hesaplıyorsunuz:

$$x + \beta = x + S(z) = S(x + z).$$

Şimdi $x + z$ sayısını hesaplamanız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Ve işte bulduğunuz sonuç:

$$x + \beta = S(x + z).$$

Bir önceki gün $x + \beta$ sayısını $S(x + y)$ olarak hesaplamıştınız, bugünse $S(x + z)$ olarak... Toplamın zamanla değişmemesi gerekir elbet, yani $S(x + y) = S(x + z)$ olmalı. Eğer bu eşitlik doğru değilse, toplamanın tanımı yanlıştır, böyle bir tanım olamaz.

İşte bu yüzden toplamanın tanımının geçerli ve kabul edilebilir bir tanım olması için aşağıdaki teoremin kanıtlanması gerekmektedir.

Teorem 1. $S(y) = S(z)$ *ise* $S(x + y) = S(x + z)$.

Eğer y bir doğal sayıysa[1], $S(y)$, $y + 1$ anlamına geleceğinden, aslında $S(y) = S(z)$ eşitliğinden $y = z$ eşitliğinin çıkmasını istiyoruz. Yani aslında aşağıdaki teoremi kanıtlamak istiyoruz:

Teorem 2. $S(y) = S(z)$ *ise* $y = z$.

Teorem 1 elbette Teorem 2'nin bir sonucudur. Bundan böyle amacımız Teorem 2'yi kanıtlamak olacak.

Teorem 2'yi kanıtlayabilir miyiz? Bunu kanıtlayamasak da, bu eşitliğe ne derece yaklaşabiliriz? Yani $S(y) = S(z)$ ise, y ile z arasında nasıl bir ilişki vardır? Önce bu soruyu yanıtlayalım:

Teorem 3. *Eğer* $S(y) = S(z)$ *ise ya* $y = z$ *dir ya da* $y \in z \in y$ *dir.*

1 Ki daha doğal sayı kavramını tanımlamadık. Sadece geçen sayıda 0, 1, 2 gibi birkaç doğal sayıyı tanımladık.

Kanıt: $S(y) = S(z)$ olsun. Demek ki

$$y \cup \{y\} = z \cup \{z\}.$$

Şimdi, $y \in \{y\}$ olduğundan, y, bu eşitliğin solundaki $y \cup \{y\}$ kümesinin bir öğesi. Demek ki y sağdaki $z \cup \{z\}$ kümesinin de bir öğesi. Dolayısıyla ya $y \in z$ ya da $y \in \{z\}$. İkinci şıkta $y = z$ olmak zorunda. Sonuç olarak ya $y \in z$ ya da $y = z$.

Aynı nedenden[2] ya $z \in y$ ya da $z = y$.

Teorem kanıtlanmıştır. □

Şimdi $y \in z \in y$ olasılığını (bir kümenin kendisinin bir öğesinin öğesi olma olasılığını) ortadan kaldırırsak Teorem 3'ten Teorem 2 çıkar, dolayısıyla Teorem 1 de kanıtlanmış olur. Ne yazık ki bu olasılığı ortadan kaldırmak kolay değildir. Çok bilinen yöntemlerle $y \in z \in y$ şıkkının varolmasını yasaklayamayız.

Bir küme, bir öğesinin öğesi olabilir mi? Daha doğrusu olmalı mı?

Hatta bir küme kendi kendisinin öğesi olabilir mi?

Bir başka soru: $x \in y \in z \in x$ ilişkilerini sağlayan x, y, z kümeleri var mıdır? Daha doğrusu bu tür kümelerin var olması doğru mudur? Böyle bir durumun olamayacağını gösteremiyorsak, böyle bir durumun olmaması için bir belit kabul etmeli miyiz?

Felsefi bir sorudur bu, ya da inanca ilişkindir. Doğanın yasalarının ne olduğunu, doğanın hangi kurallarla yönetildiğini düşündüğümüzle ilgili bir soru.

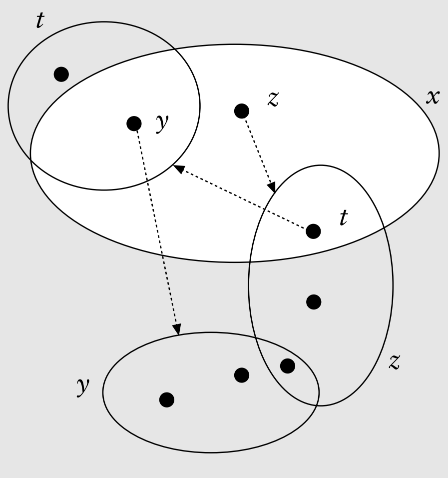
Matematikçilerin birçoğu,

$$x \in x$$
$$x \in y \in x$$
$$x \in y \in z \in x$$
$$x \in y \in z \in t \in x$$

gibi ilişkileri sağlayan kümelerin olmaması gerektiğini düşünür, çünkü bir kümenin tanımlanması için kümenin öğelerinin bilinmesi gerektiğini düşünürler. Yukardaki örneklerin herbirinde x'in öğelerinin bilinmesi için x kümesinin kendisine ihtiyaç oluyor. Genelde böyle "saçma" bir durumun olmaması gerektiği düşünülür.

Matematiğin çok bilinen belitleriyle yukardaki durumların olamayacağı gösterilemez. Bunun için şu belite ihtiyaç vardır:

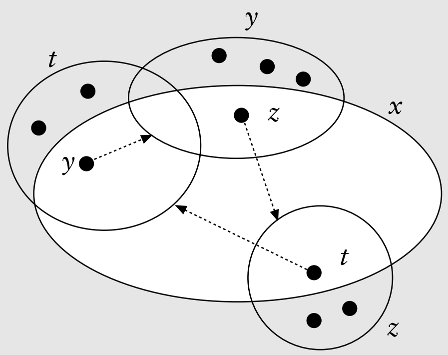
2 Yukardaki kanıtta y ile z'nin yerlerini değiştirin.



Yukarıdaki x kümesinde üç öğe var: y, z ve t. Bu üç öğenin herbiri birer küme. Yukardaki şekilde bu üç öğe hem bir öğe olarak (noktayla), hem de bir küme olarak gösterilmiş. x'in bu üç öğesiyle x'i teker teker kesiştirelim:

$$t \in x \cap z \neq \emptyset$$
$$y \in x \cap t \neq \emptyset$$
$$x \cap y = \emptyset.$$

x'in üç öğesinden sadece y'nin x'le kesişimi boşküme. Temellendirme Beliti, boş olmayan her x kümesinde böyle bir y öğesinin mutlaka olması gerektiğini söylüyor.



Bir başka deyişle yukardaki ikinci şekildeki gibi bir durum Temellendirme Beliti'ne göre olmamalı. Burada da x kümesinin üç öğesi var: y, z ve t. Ancak,

$$t \in x \cap z \neq \emptyset$$
$$y \in x \cap t \neq \emptyset$$
$$z \in x \cap y \neq \emptyset.$$

Bu durum Temellendirme Beliti'yle çelişir. Temellendirme Beliti'nin kabul edildiği bir sistemde böyle bir x kümesi olamaz.

Temellendirme Beliti[3]. *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'in $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y öğesi vardır.*

Temellendirme Beliti'nden sözünü ettiğimiz sonuçları çıkarabiliriz.

Sonuç 1. *Eğer a bir kümeyse, $a \notin a$.*

Kanıt: a bir küme olsun. Diyelim ki a kendi kendisinin bir öğesi, yani $a \in a$. Şimdi x kümesini sadece a'dan oluşan küme olarak tanımlayalım, yani $x = \{a\}$ olsun. Temellendirme Beliti'ne göre x kümesinde öyle bir y öğesi vardır ki, $x \cap y = \emptyset$ eşitliği sağlanmalıdır. Ama x kümesinin tek bir öğesi var, o da a. Demek ki $y = a$ olmalı. Dolayısıyla $x \cap a = \emptyset$ olmalı. Ama a hem x'in hem de a'nın bir öğesi, yani $a \in x \cap a$. Bu bir çelişkidir. Demek ki "$a \in a$" önermesi yanlış, yani $a \notin a$. □

Sonuç 2. *Eğer a ve b birer kümeyse, ya $a \notin b$ ya da $b \notin a$.*

Kanıt: Bir çelişki elde etmek amacıyla, yanıtlamak istediğimiz sonucun yanlış olduğunu varsayalım. Demek ki $a \in b \in a$ ilişkilerini sağlayan a ve b kümeleri vardır. $x = \{a, b\}$ olsun. Temellendirme Beliti'ne göre x'te $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y öğesi olmalı. Ama x'in sadece iki öğesi var: a ve b. Demek ki y, ya a ya da b olmak zorunda.

3 İngilizcesi "Axiom of Regularity" ya da "Axiom of Foundation".

Diyelim $y = a$. O zaman $b \in c \cap a = c \cap y = \emptyset$, çelişki.

Eğer $y = b$ ise, o zaman, $a \in c \cap b = c \cap y = \emptyset$, gene çelişki. □

Sonuç 3. *Eğer a, b ve c birer kümeyse, ya $a \notin b$ ya $b \notin c$ ya da $c \notin a$.*

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Şimdi Sonuç 2'den Teorem 3, Teorem 3'ten Teorem 2, Teorem 2'den Teorem 1 çıkar. Madem ki Teorem 1 doğru, şimdi artık hiç çekinmeden, eğer $x + y$ tanımlanmışsa, $x + S(y) = S(x + y)$ eşitliğini $x + S(y)$'nin tanımı olarak verebiliriz.

Bir tanım için bunca patırtı kopardıktan sonra, okuru kızdırmak pahasına da olsa, aslında Temellendirme Beliti'ne gereksinim olmadığını söyleyeceğim...

Temellendirme Beliti (ya da benzeri bir belit) olmadan Teorem 3'ün kanıtlanamayacağı doğru. Öte yandan biz Teorem 3'ü tüm kümeler için değil, doğal sayılar için kanıtlamak istiyoruz. Teorem 3 doğal sayılar için Temellendirme Beliti'ne gerek kalmadan kanıtlanabilir. Ama böyle bir teorem kanıtlamak için önce doğal sayının ne demek olduğunu bilmemiz lazım. Oysa biz daha böyle bir tanım yapmadık. Bir sonraki yazıda doğal sayıları tanımlayacağız. Doğal sayıları tanımlamak içinse kümeler kuramını biraz daha geliştirmemiz gerekecek. Bunu da bir sonraki yazıda yapacağız. ♣