

Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Temellendirme Beliti

Bir önceki yazıda toplama-yı şöyle tanımlamıştık:

Tanım. $x + 0 = x$.

Tanım. Eğer $x + y$ biliniyorsa, $x + S(y) = S(x + y)$.

Anımsatırız: $S(x)$ de $x \cup \{x\}$ anlamına geliyordu.

Yukardaki ikinci tanımda ilk anda dikkat çekmeyebilecek çok önemli bir sorun var. O da şu: x ile $S(y)$ 'nin toplamının sonucunun $S(x + y)$ olacağını söylüyoruz. Buna hakkımız var mı? Olmayabilir... Şöyle bir durum ortaya çıkabilir:

$S(y) = S(z)$ eşitliği geçerli olabilir ve $x + y$ ve $x + z$ de biliniyordur, ama

$$S(x + y) \neq S(x + z)$$

dir. O zaman,

$$S(x + y) = x + S(y) = x + S(z) = S(x + z)$$

eşitliklerinden bir çelişki elde ederiz.

Bir başka deyişle, $S(y)$ ile ilgili

$$x + S(y) = S(x + y)$$

eşitliğinin sadece $S(y)$ 'ye göre değişmesi gerekir, y değiştiğinde $S(y)$ değişmiyorsa, $x + S(y)$ 'nin önerilen tanımının da, yani $S(x+y)$ 'nin de değişmemesi gerekir.

Sorun tam anlaşılabilir, çünkü kolay kolay anlaşılacak bir sorun değil parmak bastığımız sorun, ama anlaşıldığında da boy uzatır. Bir başka yolla anlatmaya çalışalım:

Diyelim ki $x + \beta$ toplamını yapmak istiyorsunuz... Düşünüyorsunuz... Kısa bir zaman içinde β 'nin $S(y)$ 'ye eşit olduğunu anlıyorsunuz. Hemen ardından da, tanımdan,

$$x + \beta = x + S(y) = S(x + y)$$

eşitliklerini çıkarıyorsunuz. Şimdi $x + y$ sayısını hesaplamamız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Sonra S 'nin tanımından hareketle $S(x + y)$ 'yi kolayca $(x + y) \cup \{x + y\}$ olarak buluyorsunuz. Her şey yolunda. Şimdilik...

Ertesi gün bu buluşunuzu bir arkadaşınıza göstermek istiyorsunuz. Ne var ki kanıtınızı unuttuğunuz. Kanıtınızı unuttuğunuz ama kafanız yerinde. Gene düşünüyorsunuz. Kısa bir

zaman içinde β 'nin $S(z)$ olduğunu anlıyorsunuz. Bir önceki gün β 'nin $S(y)$ olduğunu bulmuştunuz ama bunu unuttuğunuz, bugün β 'yi $S(z)$ olarak buldunuz... Tabii bunun böyle olması için $S(y) = S(z)$ olmalı. Demek öyle, neden olmasın!.. Aynen bir önceki gün olduğu gibi hesaplıyorsunuz:

$$x + \beta = x + S(z) = S(x + z)$$

Şimdi $x + z$ sayısını hesaplamamız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Ve işte bulduğunuz sonuç:

$$x + \beta = S(x + z)$$

Bir önceki gün $x + \beta$ sayısını $S(x + y)$ olarak hesaplamıştınız, bugünse $S(x + z)$ olarak... Toplamın zamanla değişmesi gerekir elbet, yani $S(x + y) = S(x + z)$ olmalı. Eğer bu eşitlik doğru değilse, toplamın tanımı yanlıştır, böyle bir tanım olamaz.

İşte bu yüzden toplamın tanımının geçerli ve kabul edilebilir bir tanım olması için aşağıdaki teoremin kanıtlanması gerekmektedir.

Teorem 1. $S(y) = S(z)$ ise $S(x + y) = S(x + z)$.

Eğer y bir doğal sayıysa¹, $S(y)$, $y + 1$ anlamına geleceğinden, aslında $S(y) = S(z)$ eşitliğinden $y = z$ eşitliğinin çıkmasını istiyoruz. Yani aslında aşağıdaki teoremi kanıtlamak istiyoruz:

Teorem 2. $S(y) = S(z)$ ise $y = z$.

Teorem 1 elbette Teorem 2'nin bir sonucudur. Bundan böyle amacımız Teorem 2'yi kanıtlamak olacak.

Teorem 2'yi kanıtlayabilir miyiz? Bunu kanıtlayamam da, bu eşitliğe ne derece yaklaşabiliriz? Yani $S(y) = S(z)$ ise, y ile z arasında nasıl bir ilişki vardır? Önce bu soruyu yanıtlayalım:

Teorem 3. Eğer $S(y) = S(z)$ ise ya $y = z$ dir ya da $y \in z \in y$ dir.

¹ Ki daha doğal sayı kavramını tanımlamadık. Sadece geçen sayıda 0, 1, 2 gibi birkaç doğal sayıyı tanımladık.

Kanıt: $S(y) = S(z)$ olsun. Demek ki

$$y \cup \{y\} = z \cup \{z\}.$$

Şimdi, $y \in \{y\}$ olduğundan, y , bu eşitliğin soldaki $y \cup \{y\}$ kümesinin bir ögesi. Demek ki y sağdaki $z \cup \{z\}$ kümesinin de bir ögesi. Dolayısıyla ya $y \in z$ ya da $y \in \{z\}$. İkinci şıkta $y = z$ olmak zorunda. Sonuç olarak ya $y \in z$ ya da $y = z$.

Aynı nedenden² ya $z \in y$ ya da $z = y$.

Teorem kanıtlanmıştır. \square

Şimdi $y \in z \in y$ olasılığını (bir kümenin kendisinin bir ögesinin ögesi olma olasılığını) ortadan kaldırırsak Teorem 3'ten Teorem 2 çıkar, dolayısıyla Teorem 1 de kanıtlanmış olur. Ne yazık ki bu olasılığı ortadan kaldırmak kolay değildir. Çok bilinen yöntemlerle $y \in z \in y$ şikkının varolmasını yasaklayamayız.

Bir küme, bir ögesinin ögesi olabilir mi? Daha doğrusu olmalı mı?

Hatta bir küme kendi kendisinin ögesi olabilir mi?

Bir başka soru: $x \in y \in z \in x$ ilişkilerini sağlayan x, y, z kümeleri var mıdır? Daha doğrusu bu tür kümelerin var olması doğru mudur? Böyle bir durumun olamayacağını gösteremiyorsak, böyle bir durumun olmaması için bir belit kabul etmeli miyiz?

Felsefi bir sorudur bu, ya da inanca ilişkindir. Doğanın yasalarının ne olduğunu, doğanın hangi kurallarla yönetildiğini düşündüğümüzle ilgili bir soru.

Matematikçilerin birçoğu,

$$x \in x$$

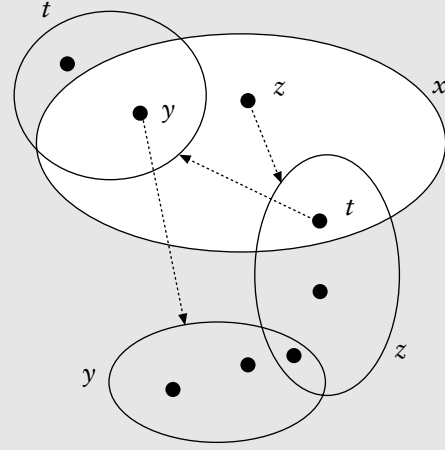
$$x \in y \in x$$

$$x \in y \in z \in x$$

$$x \in y \in z \in t \in x$$

gibi ilişkileri sağlayan kümelerin olmaması gerektiğini düşünür, çünkü bir kümenin tanımlanması için kümenin ögelerinin bilinmesi gerektiğini düşünürler. Yukardaki örneklerin herbirinde x 'in ögelerinin bilinmesi için x kümesinin kendisine ihtiyaç oluyor. Genelde böyle "saçma" bir durumun olmaması gerektiği düşünülür.

Matematığın çok bilinen belitleriyle yukardaki durumların olamayacağı gösterilemez. Bunun için şu belite ihtiyaç vardır:



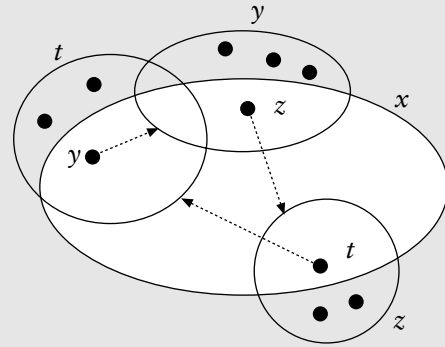
Yukarıdaki x kümesinde üç öge var: y, z ve t . Bu üç ögenin herbiri birer küme. Yukarıdaki şekilde bu üç öge hem bir öge olarak (noktaya), hem de bir küme olarak gösterilmiş. x 'in bu üç ögesiyle x 'i teker teker kesiştirelim:

$$t \in x \cap z \neq \emptyset$$

$$y \in x \cap t \neq \emptyset$$

$$x \cap y = \emptyset.$$

x 'in üç ögesinden sadece y 'nin x 'le kesişimi boşküme. Temellendirme Beliti, boş olmayan her x kümesinde böyle bir y ögesinin mutlaka olması gerektiğini söylüyor.



Bir başka deyişle yukarıdaki ikinci şekildeki gibi bir durum Temellendirme Beliti'ne göre olmamalı. Burada da x kümesinin üç ögesi var: y, z ve t . Ancak,

$$t \in x \cap z \neq \emptyset$$

$$y \in x \cap t \neq \emptyset$$

$$z \in x \cap y \neq \emptyset.$$

Bu durum Temellendirme Beliti'yle çelişir. Temellendirme Beliti'nin kabul edildiği bir sistemde böyle bir x kümesi olamaz.

2 Yukardaki kanıtta y ile z 'nin yerlerini değiştirin.

Temellendirme Beliti³. Eğer x boş olmayan bir kümeysse, o zaman x 'in $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y ögesi vardır.

Temellendirme Beliti'nden sözünü ettiğimiz sonuçları çıkarabiliriz.

Sonuç 1. Eğer a bir kümeysse, $a \notin a$.

Kanıt: a bir küme olsun. Diyelim ki a kendi kendisinin bir ögesi, yani $a \in a$. Şimdi x kümesini sadece a 'dan oluşan küme olarak tanımlayalım, yani $x = \{a\}$ olsun. Temellendirme Beliti'ne göre x kümesinde öyle bir y ögesi vardır ki, $x \cap y = \emptyset$ eşitliği sağlanmalıdır. Ama x kümesinin tek bir ögesi var, o da a . Demek ki $y = a$ olmalı. Dolayısıyla $x \cap a = \emptyset$ olmalı. Ama a hem x 'in hem de a 'nın bir ögesi, yani $a \in x \cap a$. Bu bir çelişkidir. Demek ki " $a \in a$ " önermesi yanlış, yani $a \notin a$. \square

Sonuç 2. Eğer a ve b birer kümeysse, ya $a \notin b$ ya da $b \notin a$.

Kanıt: Bir çelişki elde etmek amacıyla, yanıtlamak istediğimiz sonucun yanlış olduğunu varsayalım. Demek ki $a \in b \in a$ ilişkilerini sağlayan a ve b kümeleri vardır. $x = \{a, b\}$ olsun. Temellendirme Beliti'ne göre x 'te $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y ögesi olmalı. Ama x 'in sadece iki ögesi var: a ve b . Demek ki y , ya a ya da b olmak zorunda.

³ İngilizcesi "Axiom of Regularity" ya da "Axiom of Foundation".

Diyelim $y = a$. O zaman $b \in c \cap a = c \cap y = \emptyset$, çelişki.

Eğer $y = b$ ise, o zaman, $a \in c \cap b = c \cap y = \emptyset$, gene çelişki. \square

Sonuç 3. Eğer a , b ve c birer kümeysse, ya $a \notin b$ ya $b \notin c$ ya da $c \notin a$.

Kanıt: Okura alıştıрма olarak bırakılmıştır. \square

Şimdi Sonuç 2'den Teorem 3, Teorem 3'ten Teorem 2, Teorem 2'den Teorem 1 çıkar. Madem ki Teorem 1 doğru, şimdi artık hiç çekinmeden, eğer $x + y$ tanımlanmışsa, $x + S(y) = S(x + y)$ eşitliğini $x + S(y)$ 'nin tanımı olarak verebiliriz.

Bir tanım için bunca patırtı kopardıktan sonra, okuru kızdırmak pahasına da olsa, aslında Temellendirme Beliti'ne gereksinim olmadığını söyleyeceğim...

Temellendirme Beliti (ya da benzeri bir belit) olmadan Teorem 3'ün kanıtlanamayacağı doğru. Öte yandan biz Teorem 3'ü tüm kümeler için değil, doğal sayılar için kanıtlamak istiyoruz. Teorem 3 doğal sayılar için Temellendirme Beliti'ne gerek kalmadan kanıtlanabilir. Ama böyle bir teorem kanıtlamak için önce doğal sayının ne demek olduğunu bilmemiz lazım. Oysa biz daha böyle bir tanım yapmadık. Bir sonraki yazıda doğal sayıları tanımlayacağız. Doğal sayıları tanımlamak içinse kümeler kuramını biraz daha geliştirmemiz gerekecek. Bunu da bir sonraki yazıda yapacağız. \clubsuit

