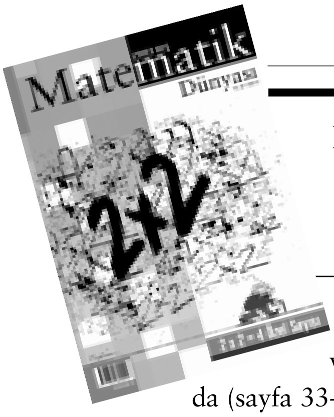


Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Doğal Sayılar Kümesi, Nihayet!

"Biraz Kümeler Kuramı ve Birkaç Doğal Sayı" yazısında (sayfa 33-37), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 sayılarını tanımladık. Ama, her sayıyı teker teker tanımlamaya zamanımız olmadığından bu tanımların bir sonu olmalı... Oysa bu yaklaşımla tanımların sonu yok... Demek ki başka bir yaklaşım gerekiyor...

Bütün sayıları bir kalemde tanımlayabiliriz miyiz? Evet. Bu yazıda doğal sayıları teker teker değil, bir bütün olarak tanımlayacağız, yani doğal sayılar kümesini tanımlayacağız.

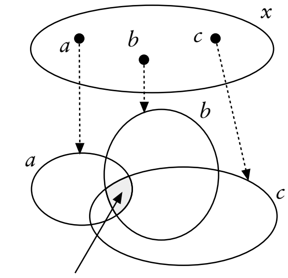
Bunun için biraz daha kümeler kuramı yapmamız gerekecek.

Önce kümelerin kesişimini alabilmek istiyoruz, sık sık gerekecek ilerde. Şimdiye kadar verdiğimiz belitler bize kümelerin kesişimini alma olanağını vermiyor. Yeni bir belite daha ihtiyacımız var.

Önce kesişimden ne anladığımızı belirtelim. "Bileşim, Kesişim, Fark" başlıklı yazımızda (sayfa 25-26) kümelerin kesişimini almıştık. Ama o zamanlar sezgisel davranıyorduk. Artık daha dikkatliyiz. Kesişimi alınacak kümeler topluluğu her şeyden önce bir küme olmalıdır, yoksa o kümelerin kesişimini alamayız. Örneğin, a ve b kümelerinin kesişimini almamız için her şeyden önce $\{a, b\}$ diye bir küme olmalıdır. "Biraz Kümeler Kuramı ve Birkaç Doğal Sayı" yazısında böyle bir kümenin olduğunu görmüştük (bknz. İki Öğeli Küme Beliti, sayfa 34). İki küme için buraya kadar bir sorun yok. Sonlu sayıda küme için de buraya kadar bir sorun yok: Sonlu sayıda kümeden oluşan bir topluluğun küme olduğu daha önce verilen belitlerle kanıtlanabilir (bknz. "Biraz Kümeler Kuramı ve Birkaç Doğal Sayı" yazısının sonundaki alıştırmalar, sayfa 39.) Ancak sonsuz sayıda küme topluluğunun küme olduğunu buraya kadar verdiğimiz belitlerle kanıtlayamayız. Hatta, her sonsuz sayıda küme topluluğunun küme olduğu doğru bile değildir.

Kesişimi alınacak kümeler topluluğu bir küme olduğunda dahi, o kümelerin kesişimini almak için bazı numaralar yapacağız.

Yapmak istediğimiz şu: Bir x kümesi verilmiş olsun. x'in öğeleri de birer küme, bunu biliyoruz.



$x = \{a, b, c\}$ kümesinin öğelerinin kesişimi, $\bigcap x$ ya da $a \cap b \cap c$ kümesi

İşte, x'in öğeleri olan kümelerin kesişimini almak istiyoruz. Örneğin, $x = \{a, b, c\}$ ise, x'in öğelerinin ortak öğelerinden oluşan $a \cap b \cap c$ topluluğunun bir küme olmasını istiyoruz.

Madem o kadar çok istiyoruz, bunun için özel bir belit yazabiliriz, aynen bileşim için yaptığımız gibi. Ama çok yararlı ve çok daha genel bir belit sunacağız ve kümelerin kesişimi bu çok daha genel belitin bir sonucu olarak çıkacak.

Bu çok yararlı ve çok daha genel beliti vermeden önce de biraz hazırlık yapmamız gerekiyor.

$\varphi(z)$ kümelerin bir özelliği olsun. "Özellik"ten ne kastettiğimizi özellikle söylemeyeceğiz burada. Sayfa 50'de bu konuya özel yer ayırdık. Okurun aklına gelebilecek hemen hemen her türlü "özellik" geçerli olacaktır. $\varphi(z)$'ye birkaç örnek verelim, $\varphi(z)$ aşağıdakilerden biri olabilir:

$z = \emptyset \vee z = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$z \notin z$

$z \in \cup z$

$\forall x\ (x \notin x \to x \in z)$

$\exists x\ x \in S(z)$

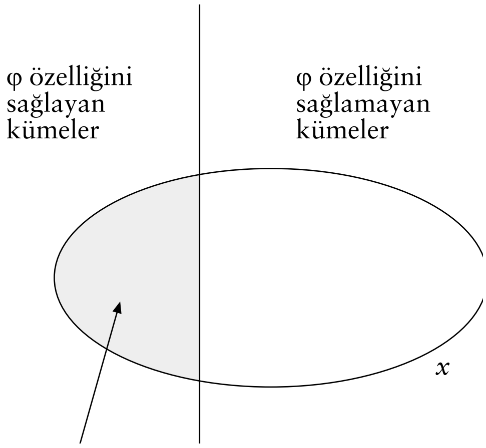
$0 \in z \wedge \forall t\ (t \in z \to S(t) \in z)$

Doğal sayının ve çift olmanın ne demek olduğunu matematiksel olarak tanımlamış olsaydık, "z bir çift doğal sayıdır" da bir özellik olurdu.

Eğer sonlu kümeleri matematiksel olarak tanımlamış olsaydık, "z sonlu bir kümedir" bir özellik olurdu.

Bazı z kümeleri φ özelliğini sağlar, bazıları sağlamaz. Bu bölümde sunacağımız belit, eğer x bir kümeyse, x'in φ özelliğini sağlayan z öğelerinin (ki öğeler de bir kümedir, bunu biliyoruz) bir küme oluşturduğunu söyleyecek.

Tanımlanabilir Altküme Beliti. *Eğer φ bir özellikse ve x bir kümeyse, x'in sadece ve sadece φ özelliğini sağlayan öğelerini öğe olarak içeren ve bunlardan başka bir öğe içermeyen bir küme vardır.*



Yukardaki belitin var olduğunu söylediği küme $\{z \in x : \varphi(z)\}$ olarak yazılır[1].

Yukardaki beliti kullanarak bir kümenin öğelerinin kesişimini alabiliriz:

Teorem 1. *Eğer u bir kümeyse, u'nun öğelerinin hepsinde birden olan öğeler, yani u'nun öğelerinin kesişimi bir küme oluştururlar.*

Kanıt: u bir küme olsun. $x = \cup u$ olsun. Bileşim Beliti'nden (sayfa 35) x'in bir küme olduğunu biliyoruz. Şimdi $\varphi(z)$ özelliğini

"Her $y \in u$ için $z \in y$"

olarak tanımlayalım. Daha matematiksel bir deyişle, $\varphi(z)$ özelliği,

$$\forall y\ (y \in u \rightarrow z \in y)$$

desin. Türkçe söylemek gerekirse, ki her zaman gerekir, $\varphi(z)$ özelliği, z'nin u'nun her öğesinin bir öğesi olduğunu söylüyor.

Şimdi x'in φ özelliğini sağlayan öğelerinden oluşan topluluğa, yani $\{z \in x : \varphi(z)\}$ topluluğuna bakalım. Bu topluluğun bir küme olduğunu yukardaki Tanımlanabilir Altküme Beliti'nden biliyoruz. Kesişim işte bu kümedir. □

Dikkat edilirse şimdilik sonsuz öğesi olan bir kümenin varlığını bilmiyoruz. Öyle bir küme olabilir de olmayabilir de, ama bu aşamada ne böyle bir kümenin olduğunu ne de olmadığını kanıtlayabiliriz[2]. Sonsuz kümelerin varlığını kanıtlamak için bir belite daha ihtiyacımız olacak. Ama önce kümeler kuramının bir başka önemli belitini açıklamak gerekiyor. Daha önce de bir tanım gerekiyor...

Tanım. *Eğer bir z kümesi,*

i. $0 \in z$

ii. $y \in z \rightarrow S(y) \in z$

koşullarını sağlıyorsa, z kümesine **tümevarımsal** *küme denir.*

Yani bir kümenin tümevarımsal olması için 0 o kümenin bir öğesi olmalı ve, kümenin her y öğesi için, $S(y)$ de kümenin bir öğesi olmalı.

Demek ki, eğer z tümevarımsal bir kümeyse, 0, $S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$, ... kümeleri yani 0, 1, 2, 3, ... "doğal sayıları" da z'nin öğeleri olmalı. Tümevarımsal bir kümenin sonsuz olması gerektiği burdan belli.

Bu aşamaya kadar yazdığımız belitlerden sonsuz bir kümenin varlığı kanıtlanamayacağından, tümevarımsal bir kümenin varlığı da kanıtlanamaz. Bunun için yepyeni bir belite ihtiyacımız var.

Tümevarımsal Küme Beliti. *Tümevarımsal bir küme vardır.*

Bu yazıdaki nihai amacımız olan doğal sayılar kümesi N'nin tanımını vermeden önce bir teoreme ve bir belite daha gereksiniyoruz. Hayat kolay değil...

Teorem 2. *$x \neq \emptyset$, öğeleri tümevarımsal kümeler olan ve boş olmayan bir küme olsun. O zaman $\cap x$ tümevarımsal bir kümedir. İki tümevarımsal kümenin kesişimi de tümevarımsal bir kümedir.*

1 Burada bir ayraç açıp geriye, Russell Paradoksu yazısına dönelim. Russell Paradoksu yazısında $y = \{z \in x : z \notin z\}$ nesnesini tanımlarken işte bunu yapmıştık. Anımsarsanız o yazıdaki x bütün kümeleri öğe olarak barındıran nesneydi (küme olduğunu kanıtlamadan bir topluluğa küme demeye hakkımız yok artık, bu yüzden x'e ve y'ye küme demekten alıkoyuyoruz kendimizi.) Yukardaki belit kullanılarak bu nesnenin küme olduğu gösterilemez çünkü o yazıdaki x nesnesinin küme olduğunu bilmiyoruz. Aslında Russell Paradoksu x'in bir küme olmadığının kanıtıdır: x küme olsaydı, yukardaki beliti kullanarak y'nin bir küme olduğunu anlar ve aynen o yazıdaki gibi bir çelişki elde ederdik.

2 Öte yandan, bu aşamada, yani yukardaki belitlerle sonsuz öğesi olan bir kümenin varlığını kanıtlayamayacağımızı kanıtlayabiliriz.

Kanıt: İkinci önerme birincinin bir sonucu olduğundan, birinci önermeyi kanıtlamak yeterli. x'in her öğesi tümevarımsal olduğundan, 0, x'in her öğesinin bir öğesidir. Yani $0 \in \cap x$. Demek ki $\cap x$ kümesi yukardaki tümevarımsal küme tanımının (i) koşulunu sağlıyor.

Şimdi $\cap x$ kümesinin ikinci koşulu sağladığını gösterelim. $y \in \cap x$ olsun. Demek ki y, x'in her öğesinin bir öğesi. x'in her öğesi tümevarımsal olduğundan, $S(y)$ de x'in her öğesinin bir öğesidir, yani $S(y) \in \cap x$. □

Bir sonraki belit, x bir kümeyse, x'in altkümelerinden oluşan $\wp(x)$ nesnesinin de bir küme olduğunu söylüyor. Önce altkümenin tanımını, sonra belitin kendisini verelim:

Tanım. *x ve y birer küme olsunlar. Eğer y'nin her öğesi x'in de bir öğesiyse y'nin x'in bir **altkümesi** olduğu söylenir ve bu durum $y \subseteq x$ yazılımıyla gösterilir.*

Altkümeler Kümesi Beliti. *Eğer x bir kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'in altkümelerini içeren bir küme vardır.*

Yukardaki belitte varlığı emredilen bu küme $\wp(x)$ olarak yazılır. Demek ki,

$$y \in \wp(x) \Leftrightarrow y \subseteq x.$$

Şimdi artık doğal sayılar kümesi N'nin tanımını verebiliriz. Ama önce... Önce N'nin ne olması gerektiği üzerine düşünelim biraz.

Doğal sayılar kümesi N, her şeyden önce tümevarımsal bir küme olmalı. Çünkü 0 bir doğal sayı. Ayrıca, eğer y bir doğal sayıysa, $y + 1$ anlamına gelecek olan $S(y)$ de bir doğal sayı olmalı.

Dahası, N elbette en küçük tümevarımsal küme olmalı, yani N, tüm tümevarımsal kümelerin bir altkümesi olmalı, çünkü N, 0'dan ve 0'a S işlemini tekrar tekrar (ama sonlu kez, onlu ne demekse!) uygulayarak elde ettiğimiz öğelerden oluşmalı.

Yani N = $\{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), ...\}$ olmalı.

Teorem 3. *En küçük bir tümevarımsal küme vardır, yani tüm tümevarımsal kümelerin altkümesi olan bir küme vardır.*

Kanıt: Tümevarımsal Küme Beliti'nden dolayı en az bir tümevarımsal küme olduğunu biliyoruz. Adına a diyeceğimiz tümevarımsal bir küme alalım. a'nın tümevarımsal tüm altkümelerini kesiştireceğiz ve elde ettiğimiz nesne bir küme olacak ve en küçük tümevarımsal küme olacak.

$x = \wp(a)$ olsun. Altkümeler Kümesi Beliti'nden x'in bir küme olduğunu biliyoruz. $\varphi(z)$ özelliği,

$$0 \in z \wedge \forall u\ (u \in z \rightarrow S(u) \in z)$$

olsun. Belli ki φ özelliğini sağlayan her küme tümevarımsaldır. Şimdi, Tanımlanabilir Altküme Beliti'nden,

$$\{z \in x : \varphi(z)\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu biliyoruz. Bu kümeye y adını verelim. Demek ki,

$$y = \{z \in x : \varphi(z)\}.$$

y'nin öğelerinin a'nın tümevarımsal altkümeleri olduğuna dikkatinizi çekeriz. Ayrıca a ∈ y. Ve şimdi,

$$\mathsf{N} = \cap y$$

olsun. Teorem 1 sayesinde N bir kümedir. Bu N kümesinden daha önce sözetmiştik, üstelik sık sık sözetmiştik, ama bu kümeyi ilk kez tanımlıyoruz. Okur, bu kümeyi ilk kez görüyormuş gibi davransın.

y'nin öğeleri tümevarımsal küme olduklarından, Teorem 3'e göre N tümevarımsal bir kümedir.

Şimdi N'nin en küçük tümevarımsal küme olduğunu yani tüm tümevarımsal kümelerin bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. t, herhangi bir tümevarımsal küme olsun. N'nin t'nin bir altkümesi olduğunu kanıtlayacağız. Hem t hem de a tümevarımsal olduklarından, $a \cap t$ kümesi a'nın tümevarımsal bir altkümesidir. Demek ki $a \cap t$, y'nin bir elemanıdır. Dolayısıyla N'yi elde etmek için kesişimini aldığımız kümelerden biridir. Bundan da N $\subseteq a \cap t$ çıkar. Öte yandan $a \cap t \subseteq t$. Demek ki N $\subseteq t$. □

Yukarda varlığı kanıtlanan kümeye **doğal sayılar kümesi** adını vereceğiz ve bu kümeyi N simgesiyle göstreceğiz[3]. N'nin öğelerine **doğal sayı** denir. Şimdi artık "doğal sayı"nın matematiksel anlamını biliyorsunuz.

N tümevarımsal bir küme olduğundan, 0 ∈ N ve her $n \in$ N için $S(n) \in$ N.

(N, 0, S) üçlüsünü tanımladığımıza göre şimdi bu üçlünün Peano Belitleri yazısında verilen P1 ve P2 özelliklerini (sayfa 16) kanıtlamamız gerekiyor. P2'nin doğru olduğu çok belli, çünkü N en küçük tümevarımsal küme. P1'i kanıtlamamız gerekiyor.

N tümevarımsal olduğuna göre, 0 ∈ N ve eğer

3 Bazı mantık kitaplarında bu küme ω (Yunan alfabesinin omega harfi) olarak gösterilir.

$y \in \mathsf{N}$ ise $S(y) \in \mathsf{N}$; demek ki S, N kümesinden gene N kümesine giden bir fonksiyon[4].

Şimdi P1 koşulunu, yani

"**P1.** $S : \mathsf{N} \to \mathsf{N}$ birebir bir fonksiyondur ve $S(\mathsf{N}) = \mathsf{N} \setminus \{0\}$ eşitliği geçerlidir"

koşulunu kanıtlamadan önce tümevarımla kanıtın doğal sayılarda neden geçerli olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 4. *$\varphi(n)$, n doğal sayısıyla ilgili bir önerme olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(S(n))$ de doğruysa[5], o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \to \varphi(S(n)))) \to \forall n\ \varphi(n)$$

önermesi N'de doğrudur.

Kanıt: $A = \{n \in \mathsf{N} : \varphi(n) \text{ doğru}\}$ olsun, yani A, φ'yi sağlayan doğal sayılardan oluşsun. Varsayıma göre $0 \in A$. Gene varsayıma göre, eğer $n \in A$ ise, $S(n) \in A$. Demek ki A tümevarımsal bir küme. Ama N tümevarımsal her kümenin bir altkümesidir, dolayısıyla A'nın da bir altkümesidir, yani $\mathsf{N} \subseteq A$. Demek ki her doğal sayı A'da, yani φ önermesi her doğal sayı için doğru. □

Şimdi P1 özelliğini kanıtlayabiliriz:

Teorem 5. *S birebir bir fonksiyondur; yani eğer $n, m \in \mathsf{N}$ ve $S(n) = S(m)$ ise, o zaman $n = m$ dir.*

Önce bir önsava ihtiyacımız var:

Önsav. *Bir doğal sayının her öğesi o doğal sayının bir altkümesidir. Yani $n, m \in \mathsf{N}$ olsun; eğer $n \in m$ ise $n \subseteq m$ dir*[6].

Kanıt: Kanıtımız m üzerinden tümevarımla olacak.

Birinci Adım: Önce $m = 0 = \emptyset$ olsun. Boşkümenin her öğesinin boşkümenin bir altkümesi olduğunu kanıtlamamız lazım. Yani boşkümenin her öğesinin boşküme olduğunu kanıtlamalıyız. Buna benzer kanıtları daha önce yapmıştık. Boşkümenin her öğesi istediğimiz her özelliği sağlar: Boşkümenin her öğesi boşküme olmasaydı, o zaman boşkümede boşküme olmayan bir öğe olurdu, ki boşkümede hiç öğe olmadığından bu imkânsızdır.

Tümevarım Adımı. Önsavı m için doğru varsayıp (tümevarım varsayımı), $S(m)$, yani $m \cup \{m\}$ için kanıtlayalım. Yani m'nin her öğesinin m'nin bir altkümesi olduğunu varsayıp (tümevarım varsayımı), $S(m)$'nin her öğesinin $S(m)$'nin bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. $n \in S(m) = m \cup \{m\}$ olsun. Madem ki $n \in m \cup \{m\}$, iki şık beliriyor önümüzde: Ya $n \in m$ ya da $n \in \{m\}$.

Birinci şıkta, $n \in m$ olduğundan, tümevarım varsayımına göre, $n \subseteq m$. İkinci şıkta da $n = m$. Demek ker her iki şıkta da $n \subseteq m$. Öte yandan m'nin $m \cup \{m\}$'nin, yani $S(m)$'nin bir altkümesi olduğu belli. Demek ki $n \subseteq S(m)$. □

Teorem 5'in Kanıtı[7]. n ve m iki doğal sayı olsunlar. $S(n) = S(m)$ eşitliğini varsayalım. $n = m$ eşitliğini kanıtlayacağız. Durum simetrik olduğundan $n \subseteq m$ ilişkisini kanıtlamak yeterli, $m \subseteq n$ ilişkisi de aynı biçimde kanıtlanır. Şu ilişkileri biliyoruz: $n \in \{n\} \subseteq n \cup \{n\} = S(n) = S(m)$. Demek ki $n \in m \cup \{m\}$. Bundan da $n \in m$ ya da $n \in \{m\}$ çıkar. Birinci şıkta, yukardaki önsava göre $n \subseteq m$. İkinci şıkta $n = m$ olmalı. Bu durumda da $n \subseteq m$. □ ♣

---

4 Kümeler kuramında her şey bir kümedir, dolayısıyla bir fonksiyon da bir kümedir. Ama biz burada fonksiyon kavramını sezgisel olarak, 2003-I sayımızda tanımladığımız gibi ele alıyoruz. İçiniz rahat olsun, her matematikçi fonksiyonu böyle sezgisel anlamda görür.

5 $S(n)$'nin n+1 anlamına geleceğini unutmayın.

6 Her doğal sayının bir küme olduğunu unutmayın.
Bir başka not: Bu önsavın içeriği "doğal sayıların özü"yle ilgili değildir. Bu önsav doğal sayıların oldukça yapay olan tanımının bir sonucudur. Eğer doğal sayıları başka türlü tanımlasaydık, önsav doğru olmayabilirdi. Ama, Teorem 2'nin içeriği doğrudan "doğal sayıların özü"ye ilgilidir. Doğal sayının tanımı nasıl yapılırsa yapılsın, Teorem 4 ve 5 doğru olacak biçimde yapılmalıdır.

7 Teorem 5 aslında sayfa 38'deki Teorem 3'ün ve yukardaki önsavın bir sonucudur. Ama aynı kanıtı buraya bir defa daha alıyoruz.