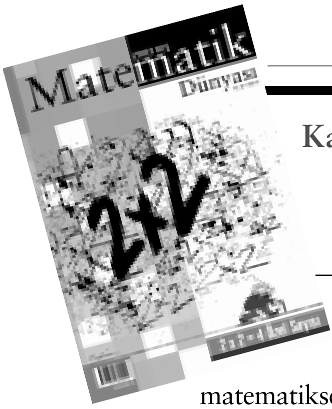

Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Toplama, Çarpma ve Sıralama

Geçen yazıda, şu özellikleri sağlayan $(\mathbb{N}, S, 0)$ diye matematiksel bir yapının varlığını kanıtladık: $\mathbb{N}$ bir kümedir. 0, $\mathbb{N}$ kümesinin bir öğesidir ve $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bir fonksiyondur ve

P1. S birebir bir fonksiyondur ve $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eşitliği geçerlidir.

P2. A, $\mathbb{N}$'nin

(i) $0 \in A$, ve

(ii) $x \in A$ ise $S(x) \in A$

özelliklerini sağlayan bir altkümesiyse, o zaman, $A = \mathbb{N}$'dir.

Doğal sayılar kümesi işte yukardaki özellikleri sağlayan matematiksel bir yapıdır.

Bu yazıda (yukarda tanımlanan) doğal sayılar kümesinde toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımlayıp, bunların hepimizin bildiği eşitlikleri ve ilişkileri sağladığını göstereceğiz. Önce toplamayla başlıyoruz.

I. Toplama

Toplamayı tanımlamak için, doğru olmasını istediğimiz,

$$n + 0 = n \text{ ve } n + (m + 1) = (n + m) + 1$$

eşitliklerini kullanacağız.

Tanım Denemesi. n ve m iki doğal sayı olsun. Bu iki sayının toplamını tanımlayacağız. Eğer $m = 0$ ise $n + m$ doğal sayısı n olarak tanımlanır. Eğer $m \neq 0$ ise, o zaman, bir ve bir tek $m' \in \mathbb{N}$ için, $m = S(m')$ eşitliği doğrudur ve bu durumda $n + m$ sayısı $S(n + m')$ olarak tanımlanır. Bir başka deyişle toplamanın tanımı şöyledir:

$$n + 0 = n$$
$$n + S(m') = S(n + m').$$

Hile Yaptık! Yukarda küçük bir hile yaptık. Anlatalım: Yukardaki tanımdan her n ve m sayısı için $n + m$ sayısının tanımlandığı ve hesaplanabileceği çıkmaz... Çünkü $n + m = n + S(m') = S(n + m')$ eşitliklerinden sonra $n + m'$ sayısını hesaplamak lazım. Eğer $m' = 0$ ise sorun yok: $n + m' = n + 0 = n$. Ancak $m' \neq 0$ ise, $n + m'$ sayısını hesaplayabilmek için, $m' = S(m'')$ eşitliğini sağlayan bir m'' bulmalı. Öyle bir m'' sayısının olduğunu biliyoruz. Bulalım öyle bir m'' sayısı. Şimdi, $n + m' = n + S(m'') = S(n + m'')$ eşitliklerinden $n + m''$ sayısını hesaplamak gerektiği anlaşılır. Eğer $m'' = 0$ ise gene bir sorun yok, ama $m'' \neq 0$ ise, $n + m''$ sayısını hesaplamak için $m'' = S(m''')$ eşitliğini sağlayan bir m''' sayısı bulmalı... Bu böylece sonsuza dek sürebilir... Sürmez, süremez ve sürmeyeceğini de biliyoruz, ama kanıtlamak gerekir...

Bu ve bu tür nerdeyse felsefi sorunların farkında olmadan da matematik yapılır, yapılmaz değil, nitekim yapılıyor da, ama matematiğin bu ince noktalarından haberdar olmak insana bir başka keyif verir.

Bu sorun'un altından şöyle kalkılır: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin aşağıdaki T1 ve T2 özelliklerini sağlayan bir X altkümesine **toplamsal** diyelim.

T1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, n) \in X$,

T2. Eğer $(n, m, p) \in X$ ise, o zaman $(n, S(m), S(p)) \in X$.

Örneğin $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin kendisi toplamsaldır.

Eğer toplamayı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayabilseydik, o zaman bu fonksiyonun grafiği yani

$$\{(n, m, n+m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

kümesi toplamsal bir küme olacaktı; ayrıca biraz düşününce anlaşılacağı gibi bu grafik en küçük toplamsal küme olacaktı (yani her toplamsal kümenin bir altkümesi olacaktı.) Yukardaki başarısız tanım denememizden sonra, toplamayı değil, olası bir toplama fonksiyonunun grafiğini (en küçük toplamsal küme olarak) tanımlayacağız.

Toplamsal kümelerin kesişimi toplamsal olduğundan (bunun kanıtı kolay), tüm toplamsal kümelerin kesişimi de toplamsaldır, ve elbette bu kesişim en küçük toplamsal kümedir. En küçük toplamsal kümeye T diyelim.

Teorem 1. *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in T$ ilişkisini sağlayan bir ve bir tane p vardır. Ayrıca, eğer bu p'ye $n + m$ adını verirsek, her n ve m için,*

$$n + 0 = n$$
$$n + S(m) = S(n + m)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Bu teoremin kanıtını vermeyeceğiz. O kadar zor değildir kanıt ama sayfa sayımız yeterli değil, ayrıca meraklı her okur da bu teoremi isterse kanıtlayabilir.

Şimdi toplamayla ilgili ilk savımızı kanıtlayalım:

Önsav 2 [Etkisiz Öğe]. *Her* $m \in \mathbb{N}$ *için,*

$$0 + m = m.$$

Kanıt: Önsavdaki eşitliği m üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

Birinci Adım: Birinci adımda önsavı $m = 0$ için, yani $0 + 0 = 0$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama bunun doğru olduğunu tanımdan biliyoruz. (Yukardaki teoremdeki birinci eşitlikte $n = 0$ alın.)

Tümevarım Adımı: Önsavın m için doğru olduğunu varsayıp, yani $0 + m = m$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), teoremin $S(m)$ için doğru olduğunu, yani $0 + S(m) = S(m)$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Tek bir satırla kanıtlayabiliriz bunu:

$$0 + S(m) = S(0 + m) = S(m).$$

Birinci eşitlik toplamanın tanımından, ikinci eşitlik tümevarım varsayımından ileri geliyor. □

Bu sonuç $0 + m = m + 0$ eşitliğini veriyor. Birazdan $n + m = m + n$ değişme özelliğini kanıtlayacağız.

1'in $S(0)$ olarak tanımlandığını anımsatırız. Tanımdan dolayı, her $n \in \mathbb{N}$ için, $S(n) = S(n + 0) = n + S(0) = n + 1$, yani $S(n)$, beklendiği üzere, $n + 1$ sayısına eşit.

Önsav 3. *Her* $n, m \in \mathbb{N}$ *için,*

$$m + S(n) = S(m) + n.$$

Kanıt: n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise, $m + S(n) = m + S(0) = S(m + 0) = S(m) = S(m) + 0 = S(m) + n$ ve bu durumda kanıt tamam.

Şimdi, her m için, $m + S(n) = S(m) + n$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), her m için, $m + S(S(n)) = S(m) + S(n)$ eşitliğini kanıtlayalım: $m + S(S(n)) = S(m + S(n)) = S(S(m) + n) = S(m) + S(n)$. Burada, sırasıyla, toplamanın tanımını, tümevarım varsayımını ve gene toplamanın tanımını kullandık. □

Teorem 4 [Değişim Özelliği]. *Her* $n, m \in \mathbb{N}$ *için,* $n + m = m + n$.

Kanıt: m üzerinden tümevarım yapacağız.

Birinci Adım: Eğer $m = 0$ ise, toplamanın tanımından ve Önsav 2'den, $n + 0 = n = 0 + n$ çıkar.

Tümevarım Adımı: Önsavın m için doğru olduğunu, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $n + m = m + n$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), önsavı $S(m)$ için kanıtlayacağız, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $n + S(m) = S(m) + n$ eşitliğini kanıtlayacağız: $n + S(m) = S(n + m) = S(m + n) = m + S(n) = S(m) + n$. Burada, sırasıyla, toplamanın tanımını, tümevarım varsayımını, tekrar toplamanın tanımını ve Önsav 3'ü kullandık. □

Teorem 5 [Birleşme Özelliği]. *Her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için,* $(n + m) + p = n + (m + p)$.

Kanıt: p üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

Birinci Adım: Eğer $p = 0$ ise, $(n + m) + p = (n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0) = n + (m + p)$ ve bu durumda kanıt tamam.

Tümevarım Adımı: Kanıtı doğrudan veriyoruz: $(n + m) + S(p) = S((n + m) + p) = S(n + (m + p)) = n + S(m + p) = n + (m + S(p))$. □

Teorem 5'e göre, toplama yaparken parantez koymak gereksizdir. $(n + m) + p$ ve $n + (m + p)$ yerine $n + m + p$ yazabiliriz.

Teorem 6 [Sadeleşme]. *Her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için, eğer* $n + m = n + p$ *ise* $m = p$*'dir.*

Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

II. Çarpma

Çarpmayı tanımlamak için, doğru olmasını istediğimiz,

$$n \times 0 = 0$$
$$n \times (m + 1) = (n \times m) + n$$

eşitliklerini kullanacağız. Yukarda yaptıklarımızdan toplamayı biliyoruz ve çarpmanın tanımında toplamayı kullanabiliriz.

Tanım Denemesi. n ve m iki doğal sayı olsun. Eğer $m = 0$ ise $n \times m$ doğal sayısı 0 olarak tanımlanır. Eğer $m \neq 0$ ise, o zaman, bir ve bir tek $m' \in \mathbb{N}$ için, $m = S(m')$ eşitliği doğrudur ve bu durumda $n \times m$ sayısı $n \times m' + n$ olarak tanımlanır[1]. Bir başka deyişle çarpmanın tanımı şöyledir:

$$n \times 0 = 0$$
$$n \times S(m') = n \times m' + n.$$

Gene Hile Yaptık! Toplamada da olduğu gibi, çarpmanın tanımını böyle yaparsak küçük ama

1 $n \times m' + n$, alışageldiği üzere $(n \times m') + n$ anlamına gelmektedir.

matematiksel düşünce açısından önemli bir noktayı atlamış oluruz. Bu tanımla $n \times m$ çarpımını her zaman hesaplayabileceğimizi kanıtlayamayız.

Bu sorun'un altından şöyle kalkılır: $\mathsf{N} \times \mathsf{N} \times \mathsf{N}$ kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir X altkümesine **çarpımsal** diyelim.

Ç1. Her $n \in \mathsf{N}$ için $(n, 0, 0) \in X$,

Ç2. Eğer $(n, m, p) \in X$ ise, o zaman $(n, S(m), p + n) \in X$.

Örneğin $\mathsf{N} \times \mathsf{N} \times \mathsf{N}$ kümesinin kendisi çarpımsaldır.

Eğer çarpmayı $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ kümesinden N kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayabilseydik, o zaman çarpmanın grafiği yani

$$\{(n, m, n\times m) : n, m \in \mathsf{N}\}$$

kümesi çarpımsal bir küme olacaktı; ayrıca biraz düşününce anlaşılacağı gibi çarpmanın grafiği en küçük çarpımsal küme olacaktı (yani her çarpımsal kümenin bir altkümesi olacaktı.) Dolayısıyla çarpmayı tanımlayacağımıza çarpma fonksiyonunun grafiğini (en küçük çarpımsal küme olarak) tanımlayacağız.

Çarpımsal kümelerin kesişimi gene çarpımsal olduğundan (bunun kanıtı kolay), tüm çarpımsal kümelerin kesişimi de toplamsaldır, ve elbette bu kesişim en küçük çarpımsal kümedir. En küçük çarpımsal kümeye Ç diyelim.

Teorem 7. *Her n, $m \in \mathsf{N}$ için, $(n, m, p) \in$ Ç ilişkisini sağlayan bir ve bir tane p vardır. Ayrıca, eğer bu p'ye $n \times m$ adını verirsek, her n ve m için,*

$$n \times 0 = n$$
$$n \times S(m) = n \times m + n.$$

Bu teoremin de kanıtını vermeyeceğiz.

Şimdi çarpmayla ilgili savlarımızı kanıtlayabiliriz. Bunları okura bırakıyoruz

Önsav 8. *Her $m \in \mathsf{N}$ için, $0 \times m = m$.*

Önsav 9. *Her $m \in \mathsf{N}$ için, $1 \times m = m = m \times 1$.*

Teorem 10. *Her n, $m \in \mathsf{N}$ için, $n \times m = m \times n$.*

Teorem 11. *Her n, m, $p \in \mathsf{N}$ için, $(n \times m) \times p = m \times (n \times p)$.*

Toplamayla çarpma arasındaki önemli ilişkiyi de verelim:

Teorem 12. *Her n, m, $p \in \mathsf{N}$ için, $n \times (m + p) = n \times m + n \times p$.*

III. Sıralama

Tanım. n ve m iki doğal sayı olsunlar. Eğer $n + p = m$ eşitliğini sağlayan bir p doğal sayısı varsa, o zaman $n \le m$ yazılır ve bu durumda n, m'den **küçükeşit** denir. Eğer $n \le m$ ise, ama $n \neq m$ ise, bu durumda $n < m$ yazılır.

Önce, önemli ama bu sayıda hiçbir işimize yaramayacak bir sonuç:

Teorem. *Her n, $m \in \mathsf{N}$ için, $n < m$ ancak ve ancak $n \in m$ ise.*

Aşağıdaki teoremlerin kanıtlarını okura bırakıyoruz.

Önce $\le$ ilişkisinin bir **sıralama** olduğunu söyleyelim:

Teorem 13. *Her n, m, $p \in \mathsf{N}$ için,*

i. $n \le n$.

ii. $n \le m$ *ve* $m \le n$ ise $n = m$.

iii. $n \le m$ ve $m \le p$ *ise* $n \le p$.

Şimdi de $\le$ sıralamasının bir **tamsıralama** olduğunu söyleyelim:

Teorem 14. *Her n, $m \in \mathsf{N}$ için, ya $n < m$ ya $n = m$ ya da $m < n$.*

Aşağıdaki önsav bir sonraki teoremde gerekecek:

Önsav 15. *Her n, $m \in \mathsf{N}$ için, eğer $m < n + 1$ ise, o zaman ya $m < n$ ya da $m = n$.*

Kanıt: $m < n + 1$ olduğundan, $m + p = n + 1$ eşitliğini sağlayan bir p vardır. Eğer $p = 0$ olsaydı, o zaman $m = n + 1$ olurdu ki bu imkânsız. Demek ki $p \neq 0$. Dolayısıyla bir $r \in \mathsf{N}$ için, $p = S(r) = r + 1$. Demek ki $m + r + 1 = m + p = n + 1$ ve Teorem 6'ya göre $m + r = n$. Demek ki $m \le n$, yani ya $m < n$ ya da $m = n$. □

Son olarak toplama ve çarpmanın sıralamayla olan ilişkilerini irdelemek gerekiyor. Bunların kanıtlarını da okura bırakıyoruz.

Teorem 17. *Her n, m, $p \in \mathsf{N}$ için, eğer $n < m$ ise o zaman $n + p < m + p$.*

Teorem 18. *Her n, m, $p \in \mathsf{N}$ için, eğer $n < m$* ve $0 < p$ ise, *o zaman $n \times p < m \times p$.* ♣