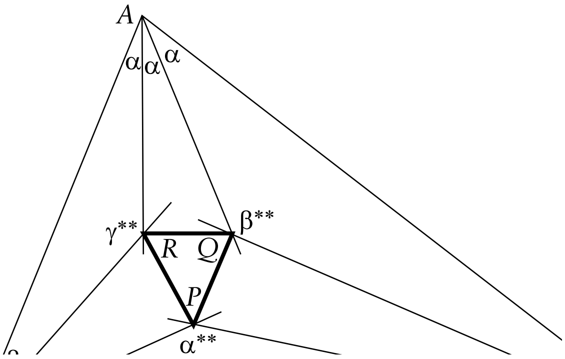
# Geometri Köşesi

Alpaslan Parlakçı*
*aparlakci@bilgi.edu.tr*

## Morley'in Mucizesi, Conway'in Lokumu

2003-II sayımızda Morley'in "mucize" diye nitelendirilen teoremini kanıtlamıştık, daha doğrusu kanıtladığımızı sanmıştık. Geçen sayımızda da belirttiğimiz gibi onarılamaz bir hata yapmışız. Yanlış, matematikçinin kamçısıdır deyip, bu sayımızda teoremin üç kanıtını birden sunacağız. Aşağıda ünlü matematikçi John Conway'in eşsiz güzellikteki kanıtını bulacaksınız.

**Morley Teoremi.** *Herhangi bir ABC üçgeninin iç açılarını eşit üç açıya bölen altı doğru ("bölen") çizilsin (aşağıdaki şekilden takip edin.) Komşu bölenlerin kesişim noktaları bir eşkenar üçgen oluşturur (şekilde PQR).*




**Kanıt.** Son derece tuhaf bir yöntemle bu üçgenin bir benzerini inşa edeceğiz. Yukardaki şekildeki yedi küçük üçgene olabildiğince benzeyen yedi üçgen inşa edip bu yedi üçgeni gene yukardaki şekildeki gibi tek bir üçgende birleştirebileceğimizi göstereceğiz. Gerisi kolay olacak. Önemli olan bu yedi üçgeni inşa edip bu üçgenleri bir üçgende toparlayabileceğimizi göstermek. İnşa edeceğimiz üçgene $A'B'C'$ demek isteriz, ancak o zaman yazılım çok karışacağından, biz $A$, $B$, $C$, $P$, $Q$, $R$'lerle çalışacağız. İnşa bittiğinde noktalarımızı simgeleyen harflerimize üslerini ekleriz.

Eğer $\delta$ bir açıysa, $\delta^*$, $\delta + 60°$'ı ifade etsin. Örneğin $0^* = 60°$.

Üçgenimizin açılarına $3\alpha$, $3\beta$, $3\gamma$ diyelim. Demek ki $\alpha + \beta + \gamma = 0^*$'dir. Bunu aklımızda tutalım. Bu eşitlikten dolayı, iç açıları

$(0^*, 0^*, 0^*)$

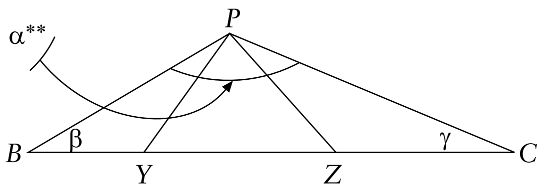
$(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$; $(\alpha^*, \beta, \gamma^*)$; $(\alpha^*, \beta^*, \gamma)$

$(\alpha^{**}, \beta, \gamma)$; $(\alpha, \beta^{**}, \gamma)$; $(\alpha, \beta, \gamma^{**})$

olan yedi üçgenin herbiri soyut olarak mevcuttur, çünkü bu açı üçlülerinin herbirinin toplamı 180°'dir. Bu yedi üçgeni aşağıda açıklanan ölçütlerde inşa edelim:

$(0^*, 0^*, 0^*)$ : Bu bir eşkenar üçgendir elbette. İnşa edeceğimiz üçgenin her kenarı 1 birim olsun. Bu üçgen ilerde bizim $PQR$ üçgenimiz olacak.

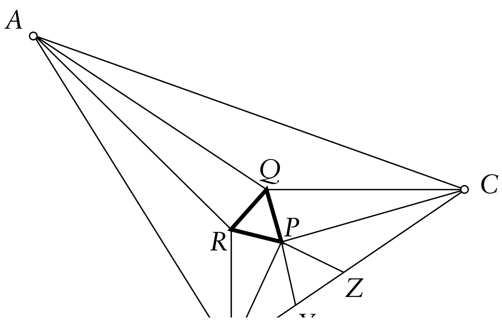
$(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$ : İnşa edeceğimiz üçgenin $\beta^*$ ve $\gamma^*$ açılarını birleştiren $m$ kenarının uzunluğu 1 birim olsun. Benzer şekilde $(\alpha^*, \beta, \gamma^*)$ ve $(\alpha^*, \beta^*, \gamma)$ üçgenleri de çizilsin. Bu üçgenler ilerde bizim $ARQ$, $BPR$, $CQP$ üçgenlerimiz olacaklar. Açılarımızı, $m(BRP) = m(CQP) = \alpha^*$, $m(ARQ) = m(CPQ) = \beta^*$ ve $m(BPR) = m(AQR) = \gamma^*$ olacak biçimde seçelim.




$(\alpha^{**}, \beta, \gamma)$ : Yukarıdaki şekildeki gibi, $B$, $P$, $C$ köşelerindeki açılar sırasıyla $\beta$, $\alpha^{**}$, $\gamma$ olsun. $PYZ$ ikizkenar üçgeni oluşacak şekilde $P$ noktasından $BC$'yi $\alpha^*$ açısında kesen iki doğru çizelim. (Eğer $\alpha^* \geq 90$ ise, o zaman dışaçı $\alpha^*$ olsun.) Ölçüleri öyle seçelim ki $PY$ ve $PZ$'nin her ikisi de birer birim uzunluğunda olsunlar ($PBC$ üçgenini belli bir ölçekle çarparak.) Diğer iki üçgen de böyle çizilsin. Bu üçgenler ilerde bizim $ARB$, $BPC$, $CQA$ üçgenlerimiz olacaklar.

---

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyesi.




Yedi üçgen elde ettik. Bu yedi üçgeni bir araya getirebiliriz, bunu birazdan göreceğiz. Bir araya gelince, bu yedi üçgen yukardaki şekli oluşturacaklar.

Bu yedi üçgenin bir araya gelmesi için $P$, $Q$, $R$ açılarının toplamının herbiri 360° olmalı ve ortak olması gereken kenarların uzunlukları eşit olmalı.

Kolayca görülebileceği gibi herbir içsel köşenin açılarının toplamı 360° dir, örneğin $P$ noktasında $BPR$'den başlayarak ve saat yönünde devam ederek açıları toplayalım: $\gamma^* + 0^* + \beta^* + \alpha^{**} = 360°$. Ayrıca $BPR$ üçgeni ya $BPZ$ üçgenine (eğer $\alpha^* \le 90$ ise) ya da $BPY$'ye (eğer $\alpha^* \ge 90$ ise) eşittir, çünkü iki açısı ($\beta$ ve $\alpha^*$ açıları, dolayısıyla üçüncü açılar da) eşit ve $PZ = PY = RP = 1$. Dolayısıyla bu iki üçgenin $BP$ kenarları da birbirine eşittir. Bu iki kenarın birbirine eşit olduğunu sinüs teoremini kullarak da görebiliriz. Bunun gibi eşit olması gereken diğer kenarlar da birbirine eşitler.

Demek ki bu yedi üçgen tek bir üçgende toparlanabiliyorlar.

Şimdi yazılımımızı değiştirip yukarda inşa ettiğimiz üçgene $A'B'C'$ diyelim. İçindeki noktalar da $P'$, $Q'$, $R'$ olsunlar. Açıları eşit olduğundan $ABC \approx A'B'C'$. Şimdi, $A'B'C'$ üçgenini belli bir ölçekle çarparak $A'B'$ uzunluğunu $AB$ uzunluğuna eşit hale getirelim. Ölçekle çarpılmış bu yeni üçgene $A''B''C''$ diyelim. Bu yeni üçgenin içindeki noktalar da $P''$, $Q''$, $R''$ olsunlar.

Elbette $ARB \approx A''R''B''$. Ama $AB = A''B''$. Demek ki $ARB$ ve $A''R''B''$ üçgenleri birbirine eşit. Dolayısıyla $AR = A''R''$ *ve* $RB = R''B''$. Aynı biçimde, birbirine tekabül eden diğer kenarlar da eşit, yani $AQ = A''Q''$, $QC = Q''C''$, $PC = P''C''$, $BP = B''P''$.

Şimdi $BRP$ ve $B''R''P''$ üçgenlerine bakalım. Bu iki üçgenin iki kenarı birbirine eşit: $RB = R''B''$ ve $BP = B''P''$. Ayrıca bu kenarların açıları $\beta$. Dolayısıyla $BRP$ ve $B''R''P''$ üçgenleri birbirine eşitler. Bundan da $PR = P''R''$ çıkar. Bunun gibi $PQ = P''Q''$ ve $QR = Q''R''$ eşitliklerini de elde ederiz. Demek ki $PQR = P''Q''R''$. Ama $P''Q''R''$ bir eşkenar üçgen (çünkü $P'Q'R'$ eşkenardı). Demek ki $PQR$ de eşkenar bir üçgendir. □ ♣

# John Conway

Yukarda, bulduğu kanıtı sunduğumuz John Conway, oyunlar kuramından cebire kadar birçok konuyla ilgilenmiş ve uğraştığı her konuda birbirinden ilginç buluşlar yapmış bir matematikçidir. Daha çok örgüler (kafesler/ızgaralar/latisler) kuramında çalışır.

İngiliz tabiyetinden olan Conway, 1937 doğumludur ve matematik öğrenimini Cambridge Üniversitesi'nde görmüştür (1956-1962) ve gene o üniversitede yirmi beş yıl kadar öğretim üyeliği yapmıştır. 1986'dan beri Princeton Üniversitesi'ndedir. Bugüne dek on kitap, 145 makale yazmıştır ve hâlâ daha üretmektedir.

Oyunlar kuramında bulduğu oyunlardan herhalde en meşhuru "life" ya da "yaşam" adı verilen ve yıllarca binlerce kişiyi meşgul eden bir oyundur. Berlekamp ve Guy'le yazdığı "Winning Ways for Your Mathematical Plays" adlı kitap son derece eğlencelidir.

Conway, oyunlar kuramından aldığı esinle, bugün **gerçeküstü sayılar** adı verilen sayıları da bulmuştur. Gerçeküstü sayılar sayesinde, bu sayımızın kapak konusu olan doğal sayılar inşa edildiği gibi, aynı anda kesirli sayılar, gerçel sayılar, karmaşık sayılar, ordinal ve kardinal sayıları da inşa edilir. Burada, inşanın ilginçliğinin ötesinde, matematiksel olarak en önemli nokta, tüm bu değişik sayı kümelerinin **aynı anda** inşa edilmesidir.

Conway aynı zamanda kendi adıyla anılan basit gruplar bularak cebirde de çok önemli yeniliklere yol açmıştır.