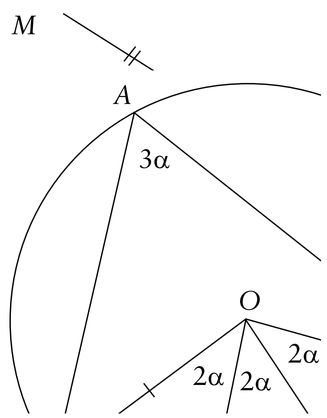
Morley Teoremi'nin Bir Başka Kanıtı

Mustafa Yağcı / *yagcimustafa@yahoo.com*

Morley Mucizesi'nin ikinci bir kanıtını veriyoruz. Kanıtı H.S. Coxeter ve S.L. Greitzer'in Geometry Revisited adlı kitabından aktarıyoruz.

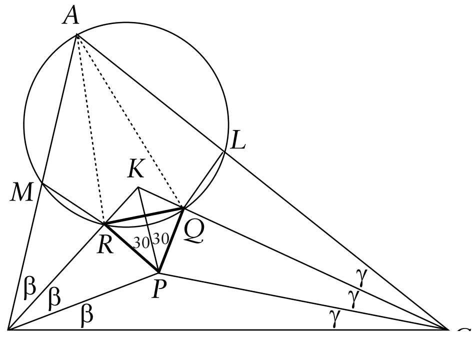
Teoremi kanıtlamak için bir önsava ihtiyacımız var.

Önsav. *Herhangi üçü doğrudaş olmayan M, R, Q, L noktaları için $MR = RQ = QL$ ve $m(MRQ) = m(RQL)$ ise bu noktalar çemberseldir. Ayrıca, ML doğrusunun Q noktasına göre zıt bölgesinde kalan bir A noktası için $3m(MRQ) + 2m(MAL) = 540°$ ise A noktası da bu çember üzerindedir.*



Kanıt: $\alpha = 90° - m(MRQ)/2$ olsun. MRQ ve RQL açılarının açıortayları bir O noktasında kesişsinler. Varsayımdan dolayı OQR üçgeni ikizkenardır, dolayısıyla $OR = OQ$. Öte yandan, α'nın tanımından ve varsayımdan $m(MRO) = m(ORQ) = m(OQR) = m(OQL) = 90 - \alpha$, bundan da hem $m(ROQ) = 2\alpha$ çıkar, hem de MRO, QRO, LQO üçgenlerinin eşitliği. Dolayısıyla $OM = OQ = OR = OL$ ve M, R, Q, L noktaları O merkezli bir çember üzerinde bulunurlar. Bu, önsavın birinci kısmı.

Şimdi ikinci kısımda söylendiği gibi bir A noktası alalım. Verilen koşuldan ve α'nın tanımından ötürü $m(MAL) = 3\alpha$. Merkez açıyla çevre açı ilişkisini düşünürsek, $m(MOL) = 2 \times m(MAL)$ olduğundan, A noktası bu çember üzerindedir. □



Morley Teoremi'nin Kanıtı: Q, P, R noktalarını bir süre unutalım. ABC üçgeninin açıları sırasıyla 3α, 3β, 3γ olsun. Bu iki açıyı yandaki şekildeki gibi üçer eşit parçaya bölen iki doğru K'de, diğer bölenler P'de kesişsin.

BKC üçgeninde BP ve CP gibi, KP de bir içaçıortaydır. Şimdi BK ve CK kenarları üzerinde $m(KPR) = m(KPQ) = 30°$ olacak şekilde sırasıyla birer R ve Q noktaları alalım.

RQP üçgeninin eşkenar olduğunu ve $m(BAR) = m(RAQ) = m(QAC) = \alpha$ eşitliklerini kanıtlayacağız. Böylece Morley Teoremi kanıtlanmış olacak.

KPR ve KPQ üçgenlerinin ortak KP kenarının iki açısı birbirine eşit olduğundan bu üçgenler eşittirler. Demek ki $PR = PQ$, yani PRQ bir ikizkenar üçgen. Ama tepe noktası $60°$ olduğundan, PQR üçgeni aslında eşkenardır, dolayısıyla $PR = RQ = QP$. Ayrıca $KR = KQ$.

Şimdi AB ve AC kenarları üzerinde $PR = RM$ ve $PQ = QL$ olacak şekilde sırasıyla birer M ve L noktaları alıyoruz (BK ve CK'nin açıortay doğrularıdır, açıortay doğrusu simetri ekseni gibi düşünülebilir, dolayısıyla M ve L noktaları vardır.) Yalnız bu koşulları sağlayan ikişer tane M ve L noktası olabilir, biz PRB ile MRB üçgenlerini eş yapan M'yi ve PQC ile LQC üçgenlerini eş yapan L'yi seçeceğiz. $MRQL$ dörtgeninin yukardaki önsavın koşullarını sağladığını kanıtlayacağız.

$MR = RQ = QL$ eşitliğini biliyoruz. $m(MRQ) = m(RQL) = 180 - 2\alpha$ eşitliğini kanıtlayacağız. Böylece, $3m(MRQ) + 2m(MAL) = 540°$ olacak ve önsav gereği, $AMRQL$'nin dairesel olduğunu kanıtlamış olacağız.

$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180$ olduğundan $\alpha + \beta + \gamma = 60$'dır, o halde $\beta + \gamma = 60 - \alpha$. BKC üçgenine bakınca anlaşılacağı üzere, $m(RKQ) = 180 - 2\beta - 2\gamma$. Dolayısıyla QRK ikizkenar üçgeninin taban açıları $\beta + \gamma = 60 - \alpha$'dir. Dolayısıyla $m(KRP) = m(KQP) = 120 - \alpha$ olur. O halde $m(KRM) = m(KQL) = 120 - \alpha$, dolayısıyla $m(MRQ) = m(RQL) = 180 - 2\alpha$.

Yukarıda kanıtladığımız önsav gereği, $MRQLA$ bir kiriş beşgeni olup, eşit uzunluktaki kirişler eşit yay uzunluğu ve dolayısıyla eşit çevre açı ölçüsü göreceğinden $m(BAR) = m(RAQ) = m(QAC) = \alpha$'dır. Mutlu son! □ ♣