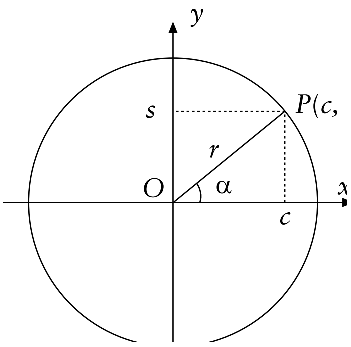
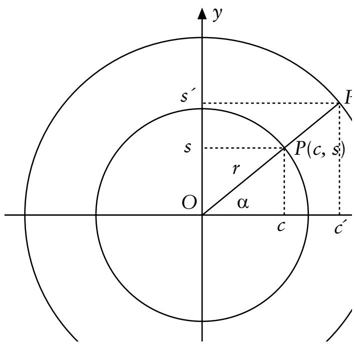
Sinüs ve Kosinüs Hakkında Bilinmesi Gereken Her Şey

Ali Mustafa

Bilindiği gibi, üç kenarı verilmiş uzunlukta olan (eğer varsa) tek bir üçgen vardır. Örneğin, kenar uzunlukları 5, 6 ve 7 olan tek bir üçgen vardır. O zaman, böyle bir üçgenin açılarını teorik olarak hesaplayabilmemiz lazım. Ya da bir üçgenin iki kenar uzunluğu ve bu iki kenar arasındaki açı verilmişse, o zaman üçüncü kenarının uzunluğunu da teorik olarak hesaplayabilmemiz lazım. Nasıl hesaplarız? Yanıt: Sinüs ve Kosinüs teoremleriyle. Bu yazıda önce sinüs ve kosinüsü tanımlayacağız, sonra da teoremlerini kanıtlayacağız.



Tanım: α, herhangi bir açı olsun. Yandaki şekildeki gibi Oxy düzlemine O merkezli, r yarıçaplı herhangi bir daire çizelim. $m(xOP) = \alpha$ olmak üzere dairenin üstünde bir P noktası alalım. P'nin koordinatları (c, s) olsun. Tales teoremine göre c/r ve s/r oranları daireden bağımsızdır, yani aynı inşayı r yerine r' yarıçaplı bir dairede yapmış olsaydık (soldaki şekil) ve $P'(c', s')$ noktası aynen $P(c, s)$ noktası gibi seçilmiş olsaydı, $c/r = c'/r'$ ve $s/r = s'/r'$ eşitlikleri geçerli olurdu. Bu yüzden hesapların daha kolay olması açısından r'yi 1 almak yararlıdır. Bu değişmez c/r ve s/r oranlarına sırasıyla cos α ve sin α denir. Ünlü



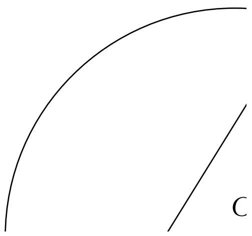
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

ilişkisi Pisagor Teoremi'nden doğrudan çıkar. eğer $0 \leq \alpha \leq 90°$ ise, $\sin \alpha \geq 0$ ve $\cos \alpha \geq 0$'dır, ama α bu aralıkta değilse, sin α ve cos α negatif olabilirler. Örneğin $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. Ama $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Kolayca kanıtlanabilecek ve ilerde gereksineceğimiz bir başka eşitlik: $\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$.

Aşağıdaki cetveldeki açıların sinüs ve kosinüsü basit geometriden çıkar.

derece	sin	cos
0	0	1
30	√3/2	1/2
45	√2/2	√2/2
60	1/2	√3/2
90	1	0

90°'den küçük açıların sinüs ve kosinüsü pozitif olduğundan, bu değerler bir diküçgende hesaplanabilir: Herhangi bir diküçgende, dik olmayan bir açının sinüsü karşıkenarın hipotenüse oranıdır, kosinüsüyse komşukenarın hipotenüse oranıdır.



Sinüs Teoremi. *ABC herhangi bir üçgen olsun. Açılara sırasıyla α, β, γ diyelim. O zaman*

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma}$$

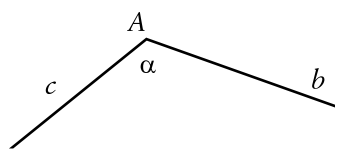
eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca, eğer üçgenin köşeleri R yarıçaplı bir çemberin üstündeyse, bu değerler $2R$'ye eşittir.

Kanıt: Çemberin merkezine O diyelim. Şekildeki gibi O'dan BC'ye dik inelim. $m(BOC) = 2\alpha$ eşitliğine dikkatinizi çekerim. $BO = OC$ olduğundan, BOC ikizkenar bir üçgendir, dolayısıyla $m(BOP) = m(POC) = \alpha$. Şimdi BOP üçgeninde hesaplayalım: $\sin(\alpha) = \sin(m(BOP)) = BP/OB = BC/2R$. Demek ki $BC/\sin(\alpha) = 2R$. (Dikkat: Eğer α açısı 90°'den fazlaysa, o zaman O noktası üçgenin dışında kalır ama gene aynı eşitliği elde ederiz.) Aynı şeyi diğer açılarla yaparsak teoremi elde ederiz. □

Kosinüs Teoremi. *Bir ABC üçgeninde,*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\alpha$$

eşitliği geçerlidir.



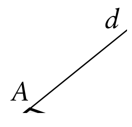
Kanıt: Eğer $\alpha = 90$ ise, kosinüs teoremi tam tamına Pisagor teoremidir. Bundan böyle $\alpha \neq 90$ olsun. α'nın 90'dan büyük ya da küçük olmasına göre iki şıkkımız var.

Birinci Şık: $\alpha \geq 90$.

Aşağıdaki şekilden izleyelim. Önce,

$$\cos(\alpha) = -\sin(\alpha - 90) = -\sin\delta = -d/b.$$

eşitliğini aklımızda tutalım, birazdan gerekecek. AHC'ye Pisagor'u uygularsak, $b^2 = h^2 + d^2$ buluruz.

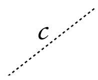


Bunu da aklımızda tutalım, bu da gerekecek. Son olarak, BHC'ye Pisagor Teoremi'ni uygulayıp yukarda bulduğumuz iki eşitliği yerlerine koyalım:

$$a^2 = (c + d)^2 + h^2 = c^2 + d^2 + h^2 + 2cd =$$
$$c^2 + b^2 + 2cd = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha.$$

Bu şıkta teoremimiz kanıtlanmıştır.

İkinci Şık: $\alpha \le 90$.

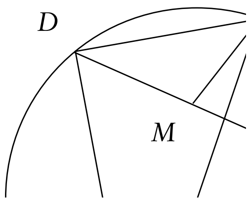


Gene yandaki şekilden takip edelim. Tanıma göre $\cos\alpha = y/b$. Pisagor Teoremi'ni şekildeki iki dik üçgene uygulayarak, $b^2 = y^2 + h^2$ ve $a^2 = x^2 + h^2$ elde ederiz. Şimdi bunları kullanarak,

$$\begin{aligned} a^2 = x^2 + h^2 = a^2 &= x^2 + b^2 - y^2 \\ &= b^2 + (x + y)(x - y) = b^2 + (x + y)(x + y - 2y) \\ &= b^2 + (x + y)^2 - 2y(x + y) = b^2 + c^2 - 2yc \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}$$

elde ederiz ki, bu da bizim kanıtlamak istediğimiz eşitliktir. □

Matematik zaman aşımına uğramaz. İşte nerdeyse 2000 yıl öncesinden bir teorem, tüm güzelliği ve geçerliliğiyle karşınızda:



Batlamyüs Teoremi. *Bir ABCD dörtgeninin köşeleri bir dairenin üstündeyse karşılıklı kenarların çarpımının toplamı iki çaprazın çarpımına eşittir, yani*

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD.$$

Batlamyüs, ya da İskenderiyeli Ptolemy (≈100-168) π sayısı için 377/120 = 3,141666... yaklaşık değerini bulmuştur.

Kanıt: BD üstünde $m(ACB) = m(MCD)$ eşitliğini sağlayacak bir M noktası seçelim. BAC ve BDC açıları dairenin aynı yayını gördüklerinden bu iki açı birbirine eşittir. Demek ki ABC ve DMC üçgenleri benzer üçgenler. Dolayısıyla $CD/MD = AC/AB$ yani $AB \times CD = AC \times MD$.

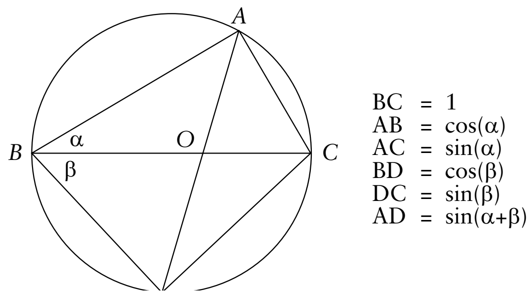
Aynı zamanda $m(BCM) = m(ACD)$. Demek ki BCM ve ACD üçgenleri de benzer üçgenler ve $BC/BM = AC/AD$ ya da $BC \times AD = AC \times BM$.

Bulduğumuz iki eşitliği toplarsak, $AB \times CD + BC \times AD = AC \times MD + AC \times BM = AC \times BD$ buluruz, ki bu da kanıtlamak istediğimiz eşitliktir. □

Batlamyüs Teoremi'nden $\sin(\alpha + \beta)$ için bir formül bulabiliriz.

Teorem. $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$.

Kanıt: Aşağıdaki şekle Batlamyüs Teoremi'ni uygulamak yeterli. □



Yukardaki formülden, $\sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) = 1$ eşitliğini kullanarak, oldukça kolay bir hesapla $\cos(\alpha+\beta)$ için ± bir formül bulabiliriz: $\cos(\alpha + \beta) = \pm[\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)]$. Ama daha kolayı ve doğrusu var: $\cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin((90^\circ - \alpha) + (-\beta))$ eşitliğine yukardaki teoremdeki formülü uygularak artıyı seçmemiz gerektiğini anlarız.

Teorem. $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Aşağıdaki sonuçların kanıtlarını okura bırakıyoruz.

Sonuçlar.

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$$

$$-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos(\alpha) - \cos(\beta)$$

$$2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right) = \sin(\alpha) \pm \sin(\beta)$$

İşte trigonometri denen şey hemen hemen bundan ibarettir. ♣