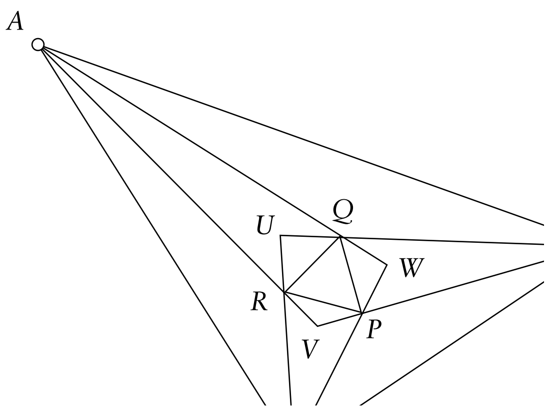
Morley Teoremi'nin Trigonometrik Kanıtı

Alpaslan Parlakçı* / *aparlakci@bilgi.edu.tr*

Teoremi bir defa daha yazmaya gerek yok, doğrudan kanıta geçiyoruz. A, B ve C köşelerinin açılarına sırasıyla 3α, 3β ve 3γ diyelim. Demek ki $\alpha + \beta + \gamma = 60°$. BC, CA ve AB kenarlarının uzunluklarına da gene bu sırayla a, b ve c diyelim.



Trigonometrik Kanıt: Bu kanıt büyük olasılıkla ilk kez [A. Letac, Solution (Morley's triangle), Problem No. 490, Sphinx, 9 (1939) 46]'da yayımlanmıştır. Rusça [D. O. Shklyarskynin, N. N. Chentsov, Y. M. Yaglom, Selected Problems ve Theorems of Elementary Mathematics, v.2, problem 97, Moscow, 1952]'de de bulunabilir.

Planımız şöyle: ARB, BPC ve CQA üçgenlerinde tabanları ve tabanlara değen açıları bildiğimizden, Sinüs Teoremi'nden AR, BR, BP, CP, CQ, and AQ kenarlarını (a, b, c, α, β, γ cinsinden) bulabiliriz. Sonra, AQR, BPR ve CPQ üçgenlerine Kosinüs Teoremi'ni uygulayarak QR, PR ve PQ kenarlarını hesaplayabiliriz. Ne sihirdir ne keramet, bu üç kenar birbirine eşit çıkar.

Planımızı uygulayalım.

Sinüs Teoremi'nden, $c/\sin(3\gamma) = b/\sin(3\beta) = a/\sin(3\alpha)$ çıkar. Şimdi bütün şekli belli bir ölçekte küçültüp (ya da büyültüp) bu sabitin 2 olduğunu varsayabiliriz, çünkü bu değişim PRQ üçgeninin eşkenarlığını bozmaz. Demek ki $c = 2\sin(3\gamma)$, $b = 2\sin(3\beta)$, $a = 2\sin(3\alpha)$.

Şimdi BPC üçgenine bakalım. Gene Sinüs Teoremi'nden, $BP/\sin(\gamma) = a/\sin(180° - \beta - \gamma) = 2\sin(3\alpha)/\sin(\beta + \gamma) = 2\sin(3\alpha)/\sin(60° - \alpha)$ çıkar. Demek ki, $BP = 2\sin(3\alpha)\sin(\gamma)/\sin(60° - \alpha)$. Şimdi biraz cambazlık yapıp $\sin(3\alpha)$'yı hesaplayalım:

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$$
$$= 4\sin(\alpha)[(\sqrt{3}/2)^2 - \sin^2(\alpha)]$$
$$= 4\sin(\alpha)[\sin^2(60°) - \sin^2(\alpha)]$$
$$= 4\sin(\alpha) \times (\sin(60°) + \sin(\alpha)) \times (\sin(60°) - \sin(\alpha))$$
$$= 4\sin(\alpha) \times 2\sin[(60°+\alpha)/2]\cos[(60°-\alpha)/2] \times 2\sin[(60°-\alpha)/2]\cos[(60° + \alpha)/2]$$
$$= 4\sin(\alpha)\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha).$$

Bu eşitliği yukarda bulduğumuz $BP = 2\sin(3\alpha)\sin(\gamma)/\sin(60° - \alpha)$ formülüne yerleştirirsek,

$$BP = 8\sin(\alpha)\sin(\gamma)\sin(60° + \alpha)$$

buluruz. Aynı biçimde hesaplayarak,

$$BR = 8\sin(\gamma)\sin(\alpha)\sin(60° + \gamma)$$

eşitliğini de buluruz.

Planımızın ikinci aşamasına geçelim. Kosinüs Teoremi'nden,

$$PR^2 = BP^2 + BR^2 - 2 \times BP \times BR \times \cos(\beta)$$

çıkar. Bundan ve yukarda bulduğumuz BP ve BR eşitliklerinden,

$$PR^2 = 64\sin^2(\alpha)\sin^2(\gamma)[\sin^2(60°+\alpha) + \sin^2(60°+\gamma) - 2\sin(60° + \alpha)\sin(60° + \gamma)\cos(\beta)]$$

çıkar. Öte yandan, $(60° + \alpha) + (60° + \gamma) + \beta = 180°$. Demek ki açıları $60° + \alpha$, $60° + \gamma$ ve β olan bir üçgen var. Hatta sonsuz tane var. Bu üçgenlerden yarıçapı 1/2 olan bir çemberin üstüne yerleşenini alalım. Üçgenin kenarları Sinüs Teoremi'ne göre $60° + \alpha$, $60° + \gamma$ ve β'ya eşittir. Üçgene Kosinüs Teoremi'ni uygularsak,

$$\sin^2(\beta) = \sin^2(60°+\alpha) + \sin^2(60°+\gamma) - 2\sin(60°+\alpha)\sin(60°+\gamma)\cos(\beta)$$

buluruz. Bu da bize

$$PR = 8\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$$

verir. Bu terim α, β, γ'ya göre simetrik olduğundan, aynı eşitliği PQ ve QR için de buluruz. Demek ki, $PR = PQ = QR$. ♣

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyesi.