Antalya Matematik Olimpiyatları

Birinci Seçme Sınavı Soruları

İlham Aliev* / *ialiev@akdeniz.edu.tr*
Mutlu Güloğlu* / *guloglu@akdeniz.edu.tr*

Sekizinci Antalya Matematik Olimpiyatlarının ilk aşama sınavı 29 Mart'ta yapıldı. 1996'da yalnızca Antalya bölgesi okullarının katılımıyla yapılan Antalya Matematik Olimpiyatları, yurdumuzun değişik okullarından gelen ilgi ve istek üzerine, sonraki yıllarda ulusal çapta düzenlenmeye başlamıştır. Antalya Matematik Olimpiyatları'nın organizasyon kısmını Akdeniz Üniversitesi Sağlık, Kültür ve Spor Dairesi Başkanlığı'yla bu daireye bağlı Matematik Kulübü, soruların hazırlanma ve değerlendirilme kısmını ise Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü gerçekleştirmektedir. Bu yılki Olimpiyat, 8 Ocak 2003'te aramızdan ayrılan Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü'nün değerli hocası Prof. Dr. Doğan Çoker anısına düzenlendi. Lise 1 ve 2. sınıf öğrencilerinden yaklaşık 700 öğrencinin katıldığı ilk aşama sınavında öğrencilere toplam 20 soru sorulmuştur.

Aşağıda, geçen sayımızda yayımladığımız söz konusu sınav sorularının kısa çözümlerini veriyoruz.

Soru 1. *Matematik Olimpiyatları'na hazırlanan İlke şöyle bir program uyguluyor: Her gün en fazla on problem çözebilen İlke, yediden fazla problem çözdüğü günden hemen sonraki iki günde en fazla beşer problem çözüyor. Bu programı titizlikle uygulayan İlke, 29 günde en fazla kaç problem çözebilir?*

A) 206 B) 207 C) 204 D) 203 E) 202

Yanıt: İlke, on problem çözdüğü günün hemen arkasından gelen iki günde beşer problem çözeceğinden, bu üç gün içinde 10 + 5 + 5 = 20 problem çözecektir. Oysa, her gün yedişer problem çözerek, üç gün içinde 7 + 7 + 7 = 21 problem çözebilir. Böylece, daha çok problem çözmek için, İlke, 29 günün 28'inde 7'şer problem ve sonuncu günde on problem çözerek, toplam 7 × 28 + 10 = 206 problem çözebilir.

Soru 2. *x ve y gerçel sayıları*

$$x + x/y + y = 8$$

$$x \times \frac{x+y}{y} = 15$$

denklemler sistemini sağlıyorsa, $x+y$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

A) 2 **B**) 3 C) $\sqrt{8}$ D) 5 E) $\sqrt{15}$

Yanıt: $x + y = u$ ve $x/y = v$ dersek,

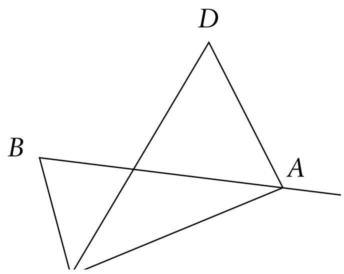
$$u + v = 8 \text{ ve } u \times v = 15$$

denklemlerini elde ederiz. Çözersek, $u(8 - u) = 15$, yani $u^2 - 8u + 15 = 0$, yani $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ bulunur. Böylece, $x + y$'nin alabileceği en küçük değer 3'tür.

* Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri.

Soru 3. *Aşağıdaki şekilde E, A ve B noktaları doğrusal olup, $AB = AC$, $DA = DC$ ve $m(EAC) + m(ADC) = 220°$'dir. Bu durumda DCB açısı kaç derecedir?*

A) 10° B) 15° **C**) 20° D) 25° E) 30°



Yanıt: $m(DCB) = x$, $m(CDA) = y$ ve $m(CAE) = z$ diyelim. Bu durumda, $m(BAC) = 180° - z$'dir. ABC üçgeni ikizkenar olduğundan, $m(ACB) = m(ABC) = z/2$'dir. Yine ADC üçgeni ikizkenar olduğundan, $m(DAC) = m(ACD) = 90° - y/2$'dir. Buradan, $x = m(ACB) - m(ACD) = z/2 - (90° - y/2) = z/2 + y/2 - 90° = 220°/2 - 90° = 20°$ olur.

Soru 4. *a doğal sayısı dört ayrı asal sayının çarpımının karesi olsun. k ve n, a'nın $k|n$ koşulunu sağlayan pozitif bölenleri olmak üzere, (k, n) ikilileri kaç tanedir? (1 ve a sayıları da a'nın bölenleridir; $k|n$ gösterimi "k, n'yi böler" anlamındadır.)*

A) 3^6 B) 4^5 C) 5^4 D) 4^6 **E**) 6^4

Yanıt: p_1, p_2, p_3, p_4 farklı asallar olmak üzere, $a = p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2$ olsun. O halde, a'nın tüm pozitif bölenleri

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} \quad (\alpha_i = 0, 1, 2)$$

biçimindedir. Şimdi, n ve k'nin, a'nın problemde verilen koşulları sağlayan pozitif bölenleri olması için gerek ve yeter koşul,

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} \text{ ve } n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} p_4^{\beta_4}$$

biçiminde olup, $0 \le \alpha_i \le \beta_i \le 2$ eşitsizliklerinin (i = 1, 2, 3, 4) sağlanmasıdır. Her i = 1, 2, 3, 4 için sonuncu koşulu sağlayan (β_i, α_i) ikilileri sayısı altıdır: (2,2), (2,1), (2,0), (1,1), (1,0), (0,0). O halde istenen koşulu sağlayan (n, k) ikilileri sayısı 6×6×6×6 = 6^4'tür.

Soru 5. {1, 2, 3, 4, ..., 20, 21, 22} *kümesinden en az kaç eleman atılmalı ki, geriye kalan sayıların çarpımı bir tamkare olsun?*

A) 4 **B**) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Yanıt: $22! = 2^{19} \times 3^9 \times 5^4 \times 7^3 \times 11^2 \times 13 \times 17 \times 19$ eşitliğinden dolayı, 13, 17, 19 dışında 6 ve 7, veya 2 ve 21, veya 3 ve 14 sayıları silinirse, geriye kalan çarpım tam kare olur.

Soru 6. $x + y + z \le a$ *eşitsizliğini sağlayan her pozitif gerçel* x, y, z *sayıları için* $xyz \le a$ *eşitsizliği de sağlanıyorsa,* a *gerçel sayısına "iyi sayı" diyelim. En büyük "iyi sayının" karesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 24 B) 25 C) 26 **D**) 27 E) 28

Yanıt: $x + y + z \le a$ olsun. AGO (Aritmetik Geometrik Ortalama) eşitsizliğinden

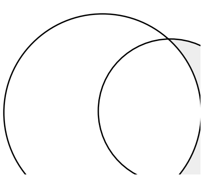
$$xyz - \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 - \frac{a^3}{27}$$

dir. Burada, $a^3/27 \le a$ yani, $a \le 3\sqrt{3}$ olursa, a iyi sayı olur. Öte yandan, $b > 3\sqrt{3}$ eşitsizliğini sağlayan bir b iyi sayı olamaz. Çünkü, $x = y = z = b/3$ için, $x + y + z = b$ olmasına karşın, $xyz = b^3/27 = b \times b^2/27 > b$ olur. Yani, en büyük iyi sayı $3\sqrt{3}$'tür.

Soru 7. $y \le z$ *olmak üzere,* $x^y + x^z = x^{111t}$ *denkleminin pozitif tamsayılarda çözümünün var olduğu biliniyorsa, aşağıdakilerden hangisi sağlanmalıdır?*

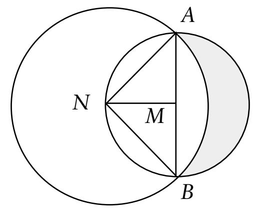
A) $y + z = 111t$ **B**) $111t = y + 1$ **C**) $x \ge 111t$ **D**) t bir tek sayıdır **E**) Hiçbiri

Yanıt: Denklemde her iki tarafı x^y'ye bölersek, $x^{z-y} + 1 = x^{111t-y}$, yani $x^{z-y}(x^{111t-z} - 1) = 1$ elde ederiz. Buradan, z = y ve $x^{111t-y} - 1 = 1$, yani $x^{111t-y} = 2$, yani $x = 2$ ve $111t - y = 1$ olur.



Soru 8. *Şekildeki küçük çemberin yarıçapı* $\sqrt{5}$, *büyük çemberin yarıçapı da* $\sqrt{10}$*'dur. Küçük çember, büyük çemberin merkezinden geçiyorsa, taralı bölgenin alanı nedir?*

A) $2\sqrt{5}$ B) $5\pi/2 - \sqrt{10}$ C) $5\sqrt{2}$ **D**) 5 E) $5\pi - 10$



Yanıt: Çemberlerin kesişim noktalarına A ve B, küçük çemberin merkezine M ve büyüğünkine de N diyelim. $MA = MN = MB = \sqrt{5}$; $NA = NB = \sqrt{10}$ ve $(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2$ eşitliklerinden $m(AMN) = m(BMN) = 90^o$ olur. O halde, AB küçük çemberin çapıdır. Buradan, Alan($A\alpha B\beta A$) = Alan($A\alpha BMA$) − Alan($A\beta BMA$) = Alan($A\alpha BMA$) − [Alan($A\beta BNA$) − Alan(ABN)] = $\pi(\sqrt{5})^2/2 - [\pi(\sqrt{10})^2/4 - (\sqrt{10})^2/2] = 5$ sonucu elde edilir.

Soru 9. *Şekilde,* 3 *satırı ve* 20 *sütunu olan bir tablonun bir parçası gösterilmiştir. Birinci satırda* 1*'den* 20*'ye kadar, ikinci satırda* 21*'den* 40*'a kadar ve üçüncü satırda da* 41*'den* 60*'a kadar doğal sayılar sırayla yazılmıştır. Şekilde gördüğünüz* x, y *ve* z *sayılarının üçü de Ayşe'nin yaşına bölünüyorsa, Ayşe'nin yaşı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 4 B) 5 **C**) 6 D) 7 E) 10

				x			
		y					
						z	

Yanıt: Şekle göre, $y = x + 18$ ve $z = y + 24$. Demek ki, x, y ve z Ayşe'nin yaşına bölündüğünden, $y - x = 18$ ve $z - y = 24$ sayıları da Ayşe'nin yaşına bölünmelidir. Dolayısıyla Ayşe'nin yaşı OBEB(18, 24) = 6 sayısını bölmelidir. Yanıt 6'dır.

Soru 10. $p(x)$ *ve* $q(x)$, *başkatsayıları* 2003 *olan ikinci dereceden farklı iki polinomdur.* $p(3) + p(5) + p(10) = q(3) + q(5) + q(10)$ *ise,* $p(x) = q(x)$ *eşitliğini sağlayan* x *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 3 B) 4 C) 5 **D**) 6 E) 10

Yanıt: $p(x) = 2003x^2 + a_1x + b_1$ ve $q(x) = 2003x^2 + a_2x + b_2$ olsun. Verilen koşulda ve sağlanması istenen eşitlikte $2003x^2$ kısmının hiçbir rolü olmadığından, $p(x) = a_1x + b_1$ ve $q(x) = a_2x + b_2$ olduğunu varsayabiliriz. Dolayısıyla istenen eşitliği sağlayan bir tek x vardır:

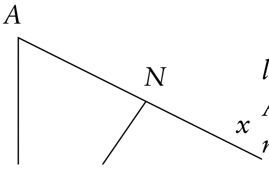
$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

Verilen koşula göre $a_1(3+5+10) + 3b_1 = a_2(3+5+10) + 3b_2$. Yani $6a_1 + b_1 = 6a_2 + b_2$. Demek ki $x = 6$, $p(x) = q(x)$ eşitliğini sağlar.

Soru 11. $1 + 3 + 5 + \ldots + 97 + 99$ *ifadesinde en az kaç* "+" *işareti* "–" *işaretiyle değiştirilmelidir ki, sonuç* 700'*e eşit olsun*?

A) 9 B) 11 C) 8 D) 7 **E**) 10

Yanıt: $1 + 3 + \ldots + 99 = 50^2 = 2500$ toplamında, bazı "+" işaretlerinin "–" işareti ile değiştirildikten sonra ortaya çıkan yeni ifadede pozitiflerin toplamına x diyelim. Bu durumda, $x - (2500 - x) = 700$. Yani $2x = 3200$, ve $x = 1600$ olur. En az "–" işareti kullanmak için, en küçük sayıların önündeki "+" işaretleri kalmalıdır. $1600 = 40^2 = 1 + 3 + \ldots + 79$ olduğuna göre, geriye kalan 81, …, 99 (toplam 10 sayı) sayılarının önüne "–" işareti konulmalıdır.



Soru 12. *Kenar uzunlukları, $AB = 3$, $BC = 4$ ve $AC = 5$ olan ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde M ve AC kenarı üzerinde N noktaları alınmıştır. MN parçası ABC üçgeninin alanını yarıya bölüyorsa, MN parçasının uzunluğu en az kaç olabilir*?

A) $3\sqrt{2}/2$ B) 1 **C**) 2 D) 3/2 E) $\sqrt{2}$

Yanıt: ABC üçgeni dik üçgendir ve Alan(ABC) = 6'dır. $NC = x$, $MC = y$ ve $m(ABC) = \alpha$ alalım. Bu durumda varsayımımıza göre, $xy\sin(\alpha)/2 = 3$, yani $xy\sin(\alpha) = 6$ olur. $\sin(\alpha) = 3/5$ olduğundan, $xy = 10$ olur. Öte yandan, Kosinüs Teoremi'ni kullanarak, $MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha) = x^2 + y^2 - 2\times10\times4/5 = x^2 + y^2 - 16$ elde ederiz. $x^2 + y^2 \geq 2xy = 20$ olduğundan, $MN^2 \geq 20 - 16 = 4$, yani $MN \geq \sqrt{4} = 2$'dir. Burada eşitlik durumu, $x = y = \sqrt{10}$ için elde edilir.

Soru 13. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ *olmak üzere*,

$$\frac{xz + zy}{x^2 + y^2 + 18z^2}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

A) $\sqrt{18/27}$ B) 1/3 C) $1/\sqrt{3}$ D) 1/10 **E**) 1/6

Yanıt: $x^2 + 18z^2 + y^2 = (x^2 + 9z^2) + (9z^2 + y^2)$

$\geq 2\sqrt{9x^2z^2} + 2\sqrt{9z^2y^2} = 6(xz + zy)$ ilişkilerinden,

$$\frac{xz + zy}{x^2 + y^2 + 18z^2} \leq \frac{1}{6}$$

çıkar. İfade bu değeri örneğin, $x = y = 3$ ve $z = 1$ için alır. Sonuç olarak, verilen ifadenin alabileceği en büyük değer, 1/6'dır.

Soru 14. $n + 1$ *ve* $16n + 1$ *ifadelerinin ikisini de tamkare yapan* $n \geq 1$ *tamsayılarının sayısı kaçtır*?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 3'ten çok, ama sonlu çoklukta E) Sonsuz çoklukta

Yanıt: $n + 1 = k^2$ ve $16n + 1 = m^2$ diyelim. k ve m sayılarının pozitif olduklarını varsayabiliriz. Birinci eşitliği 16'yla çarpıp ikincisini bundan çıkaralım. $16k^2 - m^2 = 15$, yani $(4k-m)(4k+m) = 15$ bulunur. Demek ki ya

$$4k - m = 3 \text{ ve } 4k + m = 5$$

ya da

$$4k - m = 1 \text{ ve } 4k + m = 15.$$

Birinci şıkta $k = m = 1$ ve $n = 0$ bulunur, ki soruda pozitif n'ler isteniyor.

İkinci şıkta $k = 2$, $m = 7$ ve $n = 3$ bulunur.

Soru 15. $a_1 = 1$ *ve p bir asal sayı olmak üzere, her $n \geq 2$ için a_n dizisi* $a_n = a_{n-1} + p^{n-1}$ *şeklinde tanımlansın.* $a_{2003} - a_{1998}$ *sayısının bir tamkare olması için p kaç olmalıdır*?

A) 2 **B**) 3 C) 5 D) 7 E) 11

Yanıt:
$$a_{1999} = a_{1998} + p^{1998}$$
$$a_{2000} = a_{1999} + p^{1999}$$
$$a_{2001} = a_{2000} + p^{2000}$$
$$a_{2002} = a_{2001} + p^{2001}$$
$$a_{2003} = a_{2002} + p^{2002}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayıp sadeleştirirsek, $a_{2003} - a_{1998} = p^{1998}(1+p+p^2+p^3+p^4)$ olur. $a_{2003} - a_{1998}$'in tam kare olması için, gerek ve yeter koşul, $1+p+p^2+p^3+p^4$ sayısının bir tam kare olmasıdır. Şıklar kullanılarak, $p = 3$ için bu ifadenin bir tamkare olduğu görülür. $p \neq 3$ için ifade tamkare değildir. Çünkü, $(2p^2+p)^2 < 4(1+p+p^2+p^3+p^4) < (2p^2+p+2)^2$ eşitsizliklerinden görülebileceği gibi, ortadaki ifadenin bir tamkare olması için gerek ve yeter koşul, $4(1+p+p^2+p^3+p^4) = (2p^2+p+1)^2$ olmasıdır. Buradan, $p^2 - 2p - 3 = 0$, yani $p = 3$ sonucu çıkar.

Soru 16.

$$\frac{3n + 11 + 13}{11}, \frac{3n + 12 + 14}{12}, \frac{3n + 13 + 15}{13}, \ldots,$$
$$\frac{3n + 54 + 56}{54}, \frac{3n + 55 + 57}{55}$$

kesirlerinin hiçbiri sadeleşmeyecek biçimde alınmış n doğal sayılarının en küçüğünün rakamlarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 9 **D**) 10 E) 11

Yanıt:

$$\frac{3n + k + (k+2)}{k} = \frac{3n + 2}{k} + 2$$

(k = 11, 12, ..., 54, 55) olduğundan, öncelikle 11, 12, ..., 55 sayılarının herbiriyle aralarında asal olan en küçük $3n+2$ sayısını bulmalıyız. Dolayısıyla, 2, 3, 5, ..., 53 asallarına bölünmeyen ve 3 modunda 2'ye eşit olan en küçük sayıyı bulmalıyız. 53'ten büyük, bu koşullara uyan en küçük asal sayı, 59'dur. Böylece, $3n + 2 = 59$ ve $n = 19$ olur. 19'un rakamlar toplamı da 10'dur.

Soru 17. $2002^2 \le n \le 2003^2$ *eşitsizliğini sağlayan kaç n doğal sayısı için* $[\sqrt{n}]$ *sayısı n'yi böler? (Burada, [ ] tamdeğer fonksiyonudur.)*

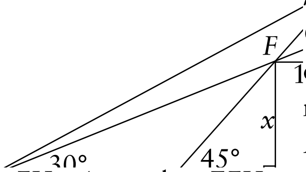
A) 2 B) 3 **C)** 4 D) 5 E) $[\sqrt{2002}]$

Yanıt: $[2002^2, 2003^2]$ aralığından alınan $n = 2002^2$, 2002^2+2002, $2002^2+2\times2002$, 2003^2 sayıları için $[\sqrt{n}]$ sayısı, n'yi böler. $2002^2 \le n < 2003^2$ eşitsizliğini sağlayan her n için, $[\sqrt{n}] = 2002$ ve $n = 2003^2$ için $[\sqrt{n}] = 2003$ olduğundan, verilen aralıkta istenilen özelliğe sahip başka sayı yoktur.

Soru 18. *ABC dik üçgeninin AB ve BC dik kenarları üzerinde D ve E noktaları,* $m(BAE) = 30^\circ$ *ve* $m(BDC) = 45^\circ$ *olacak biçimde alınmıştır.* $AE = \sqrt{3}$ *ve* $CD = \sqrt{2}$ *ise, AE ve CD'nin kesişim noktasıyla AB parçası arasındaki uzaklığı bulunuz.*

A) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-1)}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}-1$ E) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Yanıt: AE ve DC'nin kesişim noktasına F diyelim. $FG \perp AB$ ve $FH \perp CB$ olacak biçimde AB ve BC üzerinde G ve H noktaları alalım. $FG = x$ ve $EH = y$ olsunlar. $m(HFE) = m(GAE) = 30^\circ$ olduğundan, $x + y = FG + HE = AF/2 + FE/2 = \sqrt{3}/2$ olur.



Öte yandan, $m(BDC) = 45^\circ$ ve $CD = \sqrt{2}$ olduğundan, $DB = 1$. Demek ki $GB = 1 - DG = 1 - x$, dolayısıyla, $FH = 1 - x$ olur. EFH üçgeninde kolayca görülebileceği gibi, $EH/FH = \tan(30^\circ)$, yani $y/(1-x) = 1/\sqrt{3}$, yani $x + \sqrt{3}y = 1$. Demek ki,

$$x + y = \sqrt{3}/2$$
$$x + \sqrt{3}y = 1$$

denklemlerini bulduk. Bu denklemleri çözerek

$$x = \frac{1}{2(\sqrt{3}-1)}$$

buluruz.

Soru 19. $\frac{17x-5}{6}$ *ve* $\frac{14x+5}{9}$ *sayılarının ikisi de tamsayı olacak biçimde kaç tane x tamsayısı vardır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

Yanıt: $\frac{17x-5}{6} = m$ ve $\frac{14x+5}{9} = n$, ($m, n \in \mathbb{Z}$) olsun. Buradan,

$$x = \frac{6m+5}{17} = \frac{9n-5}{14}$$

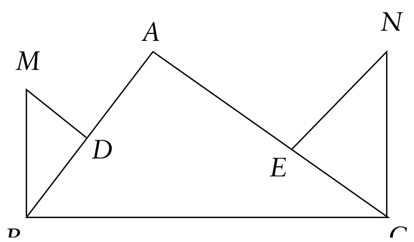
yani $84m + 70 = 153n - 85$, $153n - 84m = 155$ bulunur. Son eşitliğin sol tarafı 3'e bölünür ancak, sağ tarafı bölünmez. Sonuç olarak, problemin koşullarını sağlayan x tamsayısı yoktur.

İkinci Yöntem:

$$\frac{17x-5}{6} = 2x + 5\frac{x-1}{6} \quad \text{ve} \quad \frac{14x+5}{9} = x + 5\frac{x+1}{9}$$

eşitliklerinden, $k, m \in \mathbb{Z}$ için, $x - 1 = 6k$ ve $x + 1 = 9m$ çıkar, bunlardan da $9m - 6k = 2$ eşitliği elde edilir. Son eşitliğin sol tarafı 3'e bölünür, fakat sağ tarafı bölünmez.

Soru 20. *Şekilde* $m(ABC) = 80^\circ$, $m(ACB) = 55^\circ$ *ve* $|BC| = 3$*'tür. D, AB'nin ve E de AC'nin orta noktaları olmak üzere,* $MD \perp AB$, $MB \perp BC$, $NE \perp AC$, $NC \perp BC$*'dir.* $MB\times NC$ *sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) 4 B) 6 C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sin(80^\circ)\sin(55^\circ)$ **E)** 4,5

Yanıt: $m(DMB) = m(ABC) = 80^\circ$ ve $m(ENC) = m(ACB) = 55^\circ$'dir. BMD ve CNE diküçgenlerinden, $MB = AB/2\sin(80^\circ)$ ve $NC = AC/2\sin(55^\circ)$ bulunur. Buradan,

$$MB\times NC = AB\times AC/4\sin(55^\circ)\sin(80^\circ)$$

çıkar. Sinüs Teoremi'nden (sayfa 67), $AB\sin(55^\circ) = BC\sin(45^\circ) = AC\sin(80^\circ)$'dir. Sonuç olarak, $MB\times NC = BC/4\sin^2(45^\circ) = 4,5$ bulunur. Aslında burada, problemin sonucunun yalnızca BC uzunluğu ve BAC açısına bağlı olduğu görülmektedir. ♣